Und er bewegt sich doch – der Mathematikunterricht

Peter Baptist, Universität Bayreuth

SINUS-Transfer Abschlusstagung, Berlin 13.6.2007

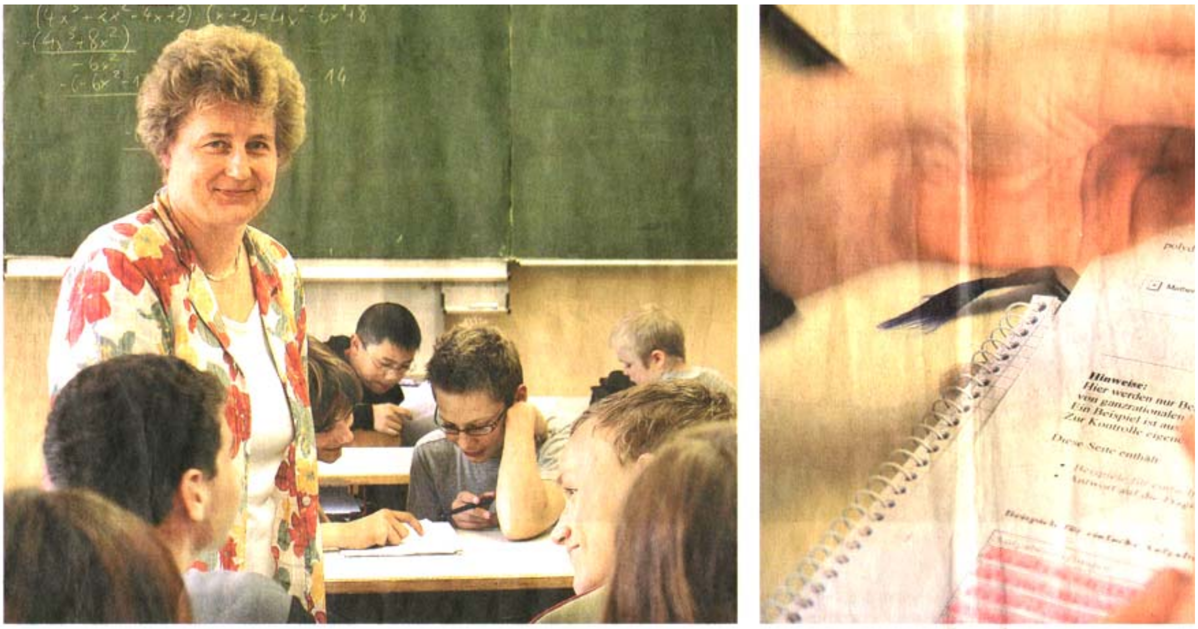
Meine Damen und Herren,

mir kommt nun die ehrenvolle Aufgabe zu, den Schlusspunkt hinter neun Jahre SINUS und SINUS-Transfer zu setzen. Der korrekte Titel unseres Programms klingt etwas schwerfällig, nämlich: „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Damit befinden wir uns unmittelbar beim zentralen Anliegen unserer Arbeit in den vergangenen Jahren. Der Ablauf von Unterricht wird immer wieder kritisch betrachtet, es gibt einige Vorurteile, die leider manchmal auch bestätigt werden. Wilhelm Busch bringt es auf den Punkt:

> Wenn alles schläft und einer spricht, den Zustand nennt man Unterricht.

Von diesem Unterrichtsskript haben wir uns in SINUS verabschiedet. Daher habe ich bewusst für meinen Vortrag den Titel gewählt: „Und er bewegt sich doch – der Mathematikunterricht“.

Um meine Aussage zu untermauern, möchte ich zwei ZEIT-Zeugen zitieren. Im vergangenen Jahr titelte Julian HANS:



Die Mathe-Revolution

»Sinus« verändert den Mathematikunterricht an deutschen Schulen. Ein Beispiel aus Brandenburg zeigt, wie VON JULIAN HANS

Zwei Jahre zuvor stellte Martin SPIEWAK fest:

> „... Realitätsbezogene Aufgaben statt schematischen Rechnens, individuelles Lernen statt Formelpauken im Gleichschritt: Für einen solchen reformierten Mathematikunterricht steht die Abkürzung SINUS. ...“

Was zeichnet den Mathematikunterricht an SINUS-Schulen aus?

Auch bei SINUS gibt es nicht den Königsweg für erfolgreichen Mathematikunterricht. Viele zum Teil sehr unterschiedliche Wege führen zu diesem Ziel. Erfolgreicher Mathematikunterricht hat ein individuelles Gesicht. Es gibt allerdings bestimmte grundlegende Leitideen, die sich als charakteristisch erwiesen haben.

Dazu gehören:

- Weniger Wissenserwerbsunterricht, mehr Problemlöseunterricht.
- Weniger Kalkül-Orientierung, mehr Verständnis-Orientierung.
- Nicht lediglich das Erzielen eines Ergebnisses steht im Blickpunkt, sondern auch die dazu erforderlichen Lernstrategien und Lernprozesse (Der Weg ist das Ziel!).

Das Umsetzen dieser Leitideen führt weg von dem erstarrten Mathematikunterricht alter Prägung, bei dem ein eng geführtes fragend-entwickelndes Vorgehen, bei dem formales Rechnen und ein Manipulieren von Termen im Zentrum stehen.

Wir müssen auch bedenken, dass die rein stoffbezogene Aufnahmebereitschaft und –fähigkeit vieler Schülerinnen und Schüler unter dem Einfluss des alltäglichen Medienkonsums erheblich abgenommen hat. Das bedeutet nicht automatisch, dass die heutigen Schülerinnen und Schüler schlechter sind als früher; sie sind jedoch anders, und verhalten sich daher anders. Das müssen wir beim Unterrichten berücksichtigen.

Im 19. Jahrhundert hat ein Mathematiker in Oxford äußerst erfolgreiche Kinderbücher geschrieben. Sein Name: Charles Lutwidge DODGSON. Besser bekannt ist er unter seinem Künstlernamen Lewis CARROL. In dem Buch „Alice’s Adventures in Wonderland“ gibt es eine Szene, in der Alice ziemlich ratlos ist. Sie kommt im Wald an eine Weggabelung und weiß nicht, wie sie weitergehen soll. Verzweifelt fragt sie die im Baum sitzende Grinsekatze: Welcher ist der richtige Weg? Die Katze antwortet: Das kommt darauf an, wo du hin willst.

Wohin soll sich der Mathematikunterricht bewegen?

SINUS gibt eine klare Richtung vor: Der Lehrer ist kein Entertainer, der Schüler kein reiner Konsument. Also keine fertige Mathematik darbieten. Kein Vormachen durch den Lehrer und anschließend ein meist unreflektiertes Nachmachen durch die Schüler. „Don't preach facts, stimulate acts", fordert mein amerikanischer Kollege Paul HALMOS.

Hier spürt man förmlich die Bewegung, die mit dieser Aufforderung in den Unterricht hineinkommt. „Stimulate acts" heißt, die Schüler anzuregen, eigene Lernwege zu gehen. Sie sollen

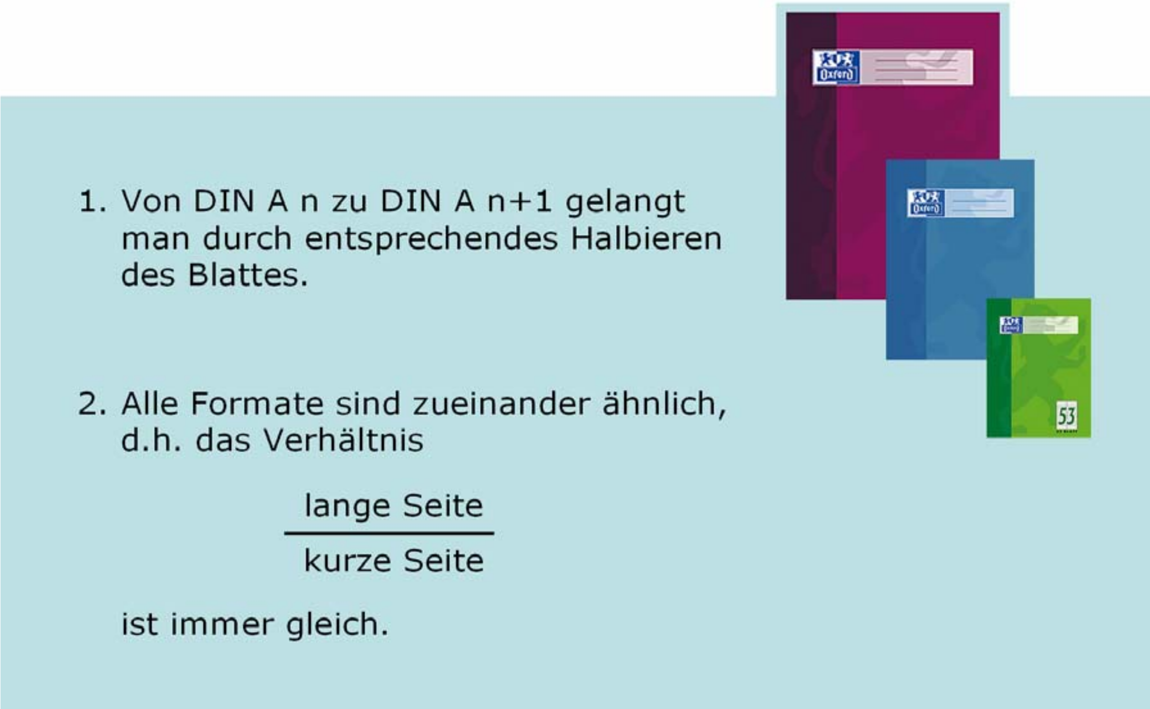
- ausprobieren
- beobachten
- entdecken
- vermuten
- erklären und begründen.

Diese Vorgehensweise beschreibt genau das, was wir in SINUS unter *Experimenteller Mathematik* verstehen. Am Anfang stehen hier niemals Formeln oder Regeln, diese ergeben sich höchstens am Ende des Lernprozesses.

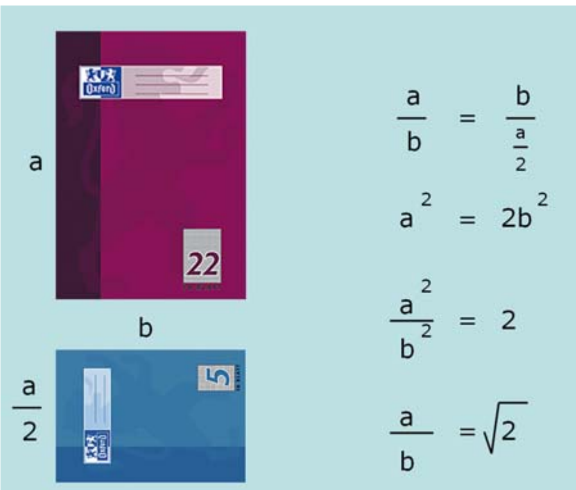
Diese Aktivitäten kennzeichnen schlechthin die Art Mathematik zu betreiben. Warum soll dies nicht auch in der Schule praktiziert werden?
In den vergangenen Jahren haben wir zahlreiche Anregungen gegeben, die von SINUS-Lehrkräften für ihre spezielle Unterrichtssituation weiterentwickelt und umgesetzt wurden.

Experimentelles Arbeiten im Unterricht hängt eng zusammen mit problemorientiertem Lehren und Lernen. Hierbei versuchen wir auch, Alltagswissen und mathematisches Wissen miteinander zu verknüpfen. Das Einbetten des Lernprozesses in das Lösen möglichst bedeutungshaltiger authentischer Probleme erlaubt es, Wissen von Anfang an unter Anwendungsaspekten anstatt in abstrakter Form zu erwerben. In diesem Sinn ist mein Vorschlag zur Einführung der Irrationalzahlen zu verstehen.

Sie alle kennen das deutsche Papierformat, das einer bestimmten Normierung unterliegt. Dabei gelten folgende Festlegungen:



Aus diesen beiden Bedingungen können wir bestimmen, in welchem Verhältnis die längere und die kürzere Seite eines Blattes im DIN A Format stehen.



Zunächst können wir mit dem Wurzelsymbol nicht viel anfangen. Wir fragen: Was für eine Zahl verbirgt sich dahinter?

Viele Menschen sind der Meinung, dass alle Zahlen Brüche sind. Damit befinden sie sich in guter Gesellschaft. Die Pythagoreer in der Antike waren ebenfalls dieser Ansicht. Ihr Credo lautete: Alles ist Zahl! Wobei sie unter Zahl eine natürliche Zahl bzw. das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen verstanden. Heutzutage können wir einen Taschenrechner zu Rate ziehen. Die Eingabe SQRT(2) liefert:

Hört dieser Dezimalbruch einmal auf? Oder besitzt er eine Periode? Dann liegt eine Bruchzahl, also eine rationale Zahl vor. Vielleicht endet dieser Dezimalbruch nie und hat auch keine Periode? Wer weiß?

Dumm gelaufen. Über die Anzeige eines TR lässt sich die Frage nach der Natur von SQRT(2) nicht beantworten. Also schließen wir uns der Meinung vieler Menschen an und behaupten zunächst, dass sich SQRT(2) als Bruch darstellen lässt. Allerdings kennen wir diesen Bruch nicht. Deshalb müssen wir uns mit einer allgemeinen Darstellung zufrieden geben.

Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\
2 &= \frac{a^2}{b^2} \\
2b^2 &= a^2 && \Rightarrow \quad a^2 \text{ gerade} \\
& && \quad a \text{ gerade} \\
& && \quad a = 2n \\
2b^2 &= 4n^2 \\
b^2 &= 2n^2 && \Rightarrow \quad b^2 \text{ gerade} \\
& && \quad b \text{ gerade} \\
& && \quad b = 2m
\end{aligned}$$

Die Überlegungen führen schließlich zu einem Widerspruch. Also ist SQRT(2) nicht rational.

Es geht hier nicht darum, dass Schüler solche Überlegungen eigenständig führen können. Sie sollen aber den vorliegenden Nachweis verstehen und nachvollziehen können. Sie sollen ein Gefühl für logische Argumentationen und für den Umgang mit Zahlen bekommen. Mathematik nicht als Rechenkunst, sondern als Schule des Denkens.

Weitere Aktivitäten in diesem Kontext:

- Historischer Exkurs: Wie, wo und wann sind Menschen auf Irrationalzahlen gestoßen? (Pythagoräer, HIPPASOS von Metapont (450 v. Chr.), Pentagramm)
- Wie erhält man die einzelnen Stellen dieser Dezimalzahl? Eine anschauliche geometrische Methode liefert das HERON-Verfahren (wir bleiben in der Antike aber etwa 500 Jahre später, 1. Jhdt. n. Chr.).

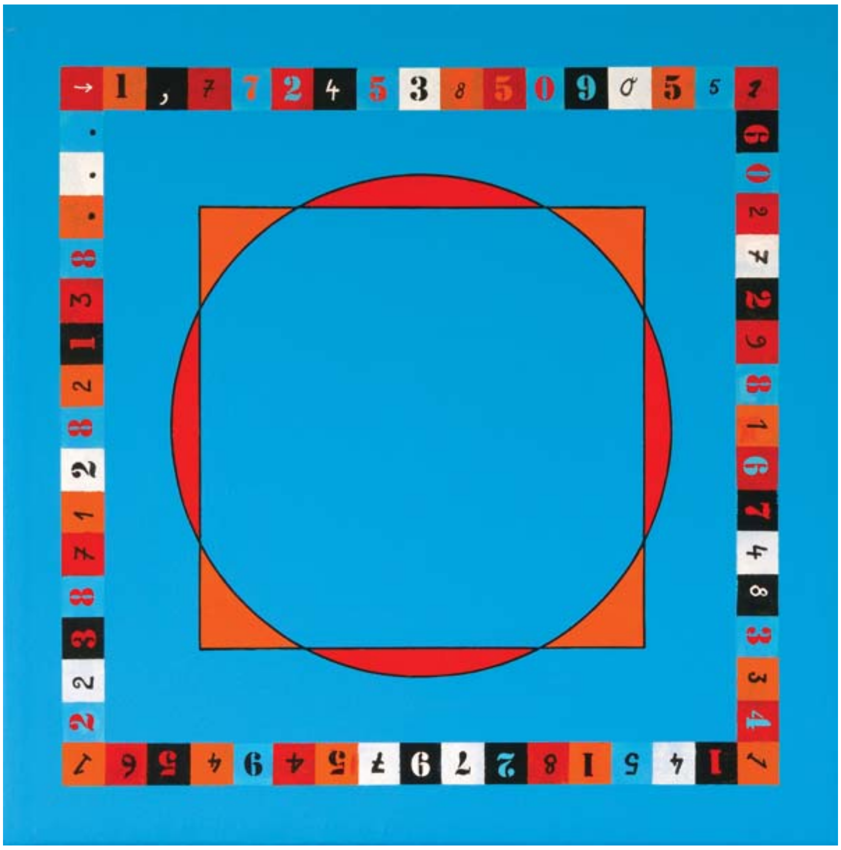
Die Idee: Ein Rechteck mit Flächeninhalt 2 wird in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt übergeführt. [Wie macht man das? Erste neue Rechteckseite: Mittelwert aus den Längen der bisherigen Seiten. Zweite Seite so wählen, dass Flächeninhalt 2 erhalten bleibt, usw.]
Dabei wird das Rechteck schrittweise „quadratisch“ gemacht. Wir können von einer Quadratur eines Rechtecks sprechen.

Wesentlich berühmter als die „Quadratur des Rechtecks“ ist die schon sprichwörtliche „Quadratur des Kreises“. Bereits in der Antike versuchte man dieses Problem zu lösen. Auch hier geht es um eine irrationale Zahl, nämlich pi.

Dieses Bild des schweizerischen Künstlers Eugen JOST zeigt die ersten 288 Stellen der Zahl Pi. Bislang wurden bereit über 51 Milliarden Dezimalstellen berechnet. Für praktische Anwendungen ist diese Stellenzahl natürlich ein wenig übertrieben. Die Bibel erweist sich als wesentlich bescheidener. Als „Rahmen“ verwendet JOST ein Zitat aus dem Alten Testament (Buch der Könige). Dort heißt es über einen Altar im Tempel Salomons: Und er machte ein Meer, gegossen von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundumher und fünf Ellen hoch und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß ringsum. Dies ergibt den Wert 3.

Die Quadratur des Kreises bedeutet, zu einem Kreis mit Radius 1, der also die Fläche pi besitzt, ein flächengleiches Quadrat mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. D.h. das gesuchte Quadrat besitzt die Seitenlänge SQRT(pi).

Hier sehen Sie diese Problemstellung in der Deutung von Eugen JOST. Der „Rahmen besteht diesmal nicht aus Buchstaben, sondern aus Ziffern. Wir lesen die SQRT(pi).



Die beiden gezeigten Bilder geben einen Vorgeschmack auf einen Mathematikkalender, den wir gerade mit Unterstützung des Arbeitgeberverbands Gesamtmetall erstellen.

2008 ist das Jahr der Mathematik. Wir haben 12 mathematische Themen ausgewählt, die Eugen JOST künstlerisch umsetzt. Kommentiert werden die Bilder von Albrecht BEUTELSPACHER und mir. Jedes der Bilder gibt vielfältige Anregungen und Impulse für den Mathematikunterricht.

Meine bisherige Vorgehensweise macht ein wesentliches Merkmal der Mathematik deutlich. Man wird nie fertig. Denn von einem gelösten Problem gelangt man direkt zu neuen ungeklärten Fragestellungen. Mathematik erweist sich als ein Gebiet ohne Ende! Dies kann und soll auch in der Schule thematisiert werden.

Dieses aktive Beschäftigen mit mathematischen Inhalten beinhaltet allgemeine Kompetenzen wie z. B. Problemlösen, Modellieren, Argumentieren, Kommunizieren. Hier wird ganz deutlich gezeigt, Bildungsstandards sind kein künstliches Beiwerk, sie werden bei einem vernünftigen Unterrichten nahezu automatisch umgesetzt.

Und er bewegt sich doch – der Mathematikunterricht

Bewegen kann und soll man auch wörtlich nehmen. Stichworte hierzu sind: dynamische Mathematik, dynamische Arbeitsblätter, dynamische Lernumgebungen.

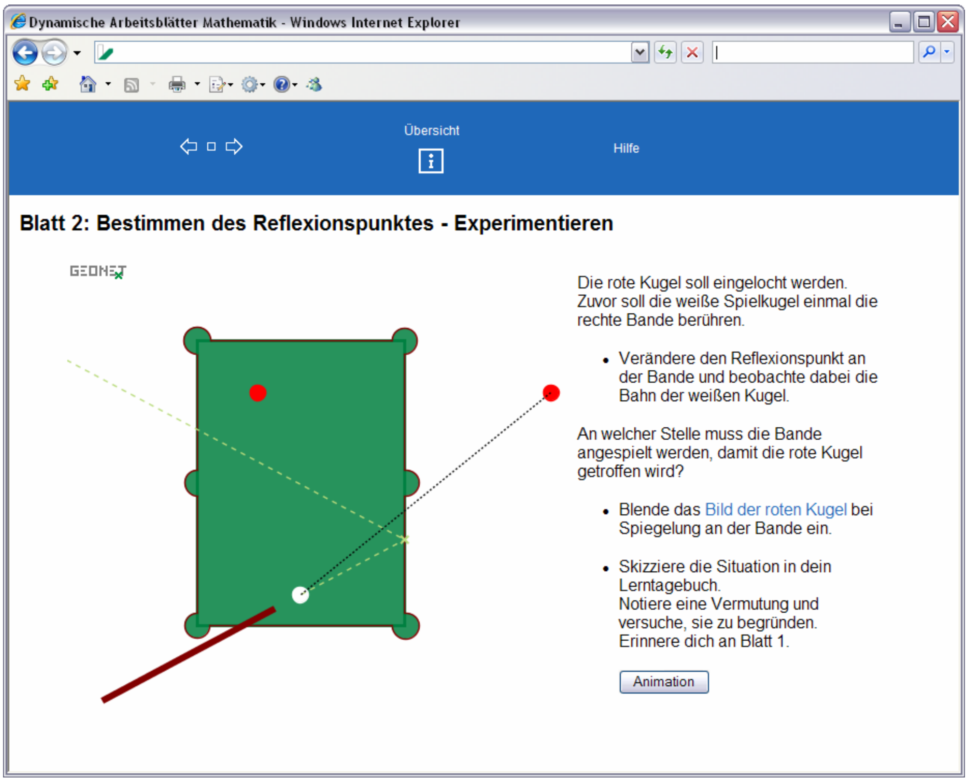
Wir haben in Bayreuth für SINUS nicht nur innovative elektronische Unterrichtsmaterialien entwickelt, sondern auch Konzepte erarbeitet, wie der Einsatz im Unterricht erfolgen kann. Dabei möchte ich klar herausstellen:

Es geht uns nicht darum, Technologie um der Technologie willen in die Schule zu bringen. Unser Ziel ist eindeutig:

- Es geht um erhöhte Anschaulichkeit.
- Es geht um ein vertieftes mathematisches Verständnis.
- Es geht um ein Verbessern des Lehrens und Lernens von Mathematik.

Eine besondere Form des individuellen Lernens erhalten wir durch das Verknüpfen traditioneller und elektronischer Medien. Dynamische Arbeitsblätter mit entsprechenden Arbeitsaufträgen führen zum Entdecken bestimmter Zusammenhänge und Phänomene.

- Experimentieren am Bildschirm

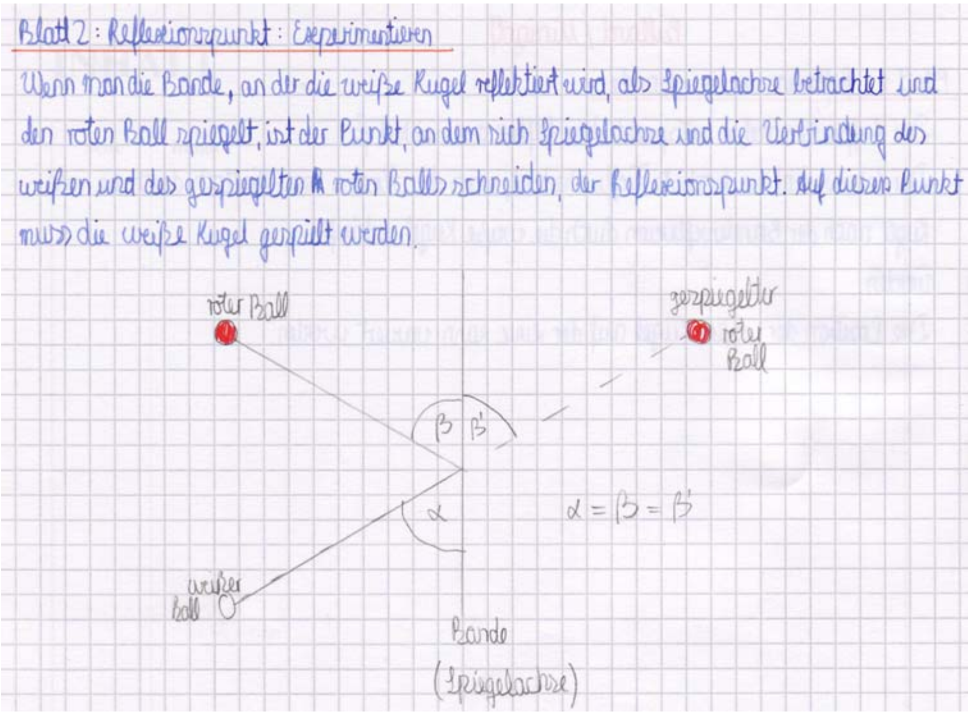


Sie sehen ein Beispiel zur Achsenspiegelung verpackt in eine Problemstellung beim Billardspiel. Der Unterschied zum normalen Arbeitsblatt: Die Abbildungen sind beweglich, die Schüler sollen am Bildschirm experimentieren.

Mit der Durchführung des „Experiments“ ist es aber im Unterricht nicht getan. Denn nach dem Abschalten des PCs geraten die herausgefundenen Erkenntnisse schnell in Vergessenheit. Um eine gewisse Nachhaltigkeit zu erzielen, um einen dauerhaften Lerneffekt zu erreichen, müssen die Experimente zusammen mit den Ergebnissen in einem besonderen Heft, dem Lerntagebuch, dokumentiert werden.

- Dokumentieren im Lerntagebuch

  Die Folie zeigt die Bearbeitung eines Schülers zu obigem dynamischen Arbeitsblatt. In ihrem Lerntagebuch skizzieren die Schüler aussagekräftige Figuren, notieren Beobachtungen, formulieren Vermutungen, schreiben Begründungen auf, halten persönliche Eindrücke fest.



Durch diese Vorgehensweise werden die Lernenden angehalten, sorgfältig zu arbeiten und gründlicher nachzudenken. Die dynamischen Arbeitsblätter ermöglichen zusammen mit dem Lerntagebuch erste Schritte weg von einer eher passiven Lernhaltung hin zu einem aktiv entdeckenden Lernen. Ein weiterer Vorteil, die Schüler können ihr Lerntempo weitgehend selbst bestimmen.

Für diese Unterrichtskonzepte und für die inhaltliche und technische Realisation wurden wir 2005 und 2007 mit Software-Preisen ausgezeichnet, u. zw. mit dem Deutschen Bildungssoftwarepreis digita sowie dem Deutschen Innovationsaward d-elina. Auch in der Schulpraxis haben sich diese elektronischen Medien und das zugehörige Konzept bewährt, wie wir inzwischen durch umfangreiche Untersuchungen belegen können.

Und er bewegt sich doch – der Mathematikunterricht

SINUS und SINUS-Transfer haben Wege aufgezeigt, wie sich Mathematik interessanter, bewusster, nachhaltiger, verständnisorientierter unterrichten lässt. Der Mathematikunterricht ist in Bewegung geraten. Wie können wir – auch nach diesem offiziellen Ende – eine anhaltende Weiterentwicklung des Unterrichts gewährleisten? Wie halten wir den Mathematikunterricht in Bewegung? Wir müssen auch künftig etwas tun, denn selbst mit SINUS ist es nicht gelungen, ein Perpetuum mobile zu erschaffen.

In einem Bericht für die Amtschefkonferenz der KMK stellt Herr Prenzel fest (ich zitiere): „Es hat sich weiterhin gezeigt, dass Schulen kontinuierlich Anregungen, aber auch Unterstützung von außen benötigen, um ihren Unterricht konsequent und nachhaltig weiterzuentwickeln. ...“

D.h. wenn der durch SINUS angestoßene Prozess nicht enden soll, dann müssen wir ihn immer wieder anstoßen, neue Ideen einbringen, Unterstützung anbieten. Diese Aufgabe kann und soll der zentrale SINUS-Transfer-Server (http://www.sinus-transfer.de) auch in Zukunft wirkungsvoll unterstützen.

Zu seinen Zielen und Aufgaben gehören:

- Dokumentieren unterrichtlicher Entwicklungsprozesse in Mathematik und den Naturwissenschaften.
- Orientierungshilfe geben durch „good practice“ – Beispiele.
- Materialien für die Lehrerausbildung und –fortbildung bereitstellen.
- Informationen zur Thematik „Lehren und Lernen“ anbieten und eine Kommunikation ermöglichen.

- Evaluation fördern und unterstützen, und zwar durch Beispiele und durch das Bereitstellen von Erhebungsbögen (elektronisch und als Druckvorlagen).

Ein immer wieder gelobter positiver Aspekt von SINUS war der Blick und der Austausch über die Ländergrenzen hinweg. Daher müssen Lehrerinnen und Lehrer auch künftig Materialien und Informationen ausgehend von einer zentralen Adresse suchen und finden können. Natürlich können hier auf Wunsch eigene länderspezifische Bereiche eingerichtet werden.

Ein entsprechend gepflegter Server garantiert auch in Zukunft, dass die Erkenntnisse und Erfahrungen aus SINUS nicht nur nicht in Vergessenheit geraten, sondern noch weiterentwickelt werden. Ein solches Medium kann zudem eine Kommunikations- und eine Austauschplattform für die an der dritten Welle Beteiligten darstellen.

Qualität des Unterrichts – worauf kommt es an?

Entscheidend für die Qualität des Unterrichts sind nicht so sehr die Organisationsformen der Schulen oder die äußeren Rahmenbedingungen oder Lehrpläne oder Bildungsstandards oder Schulbücher.
Entscheidend sind die Personen, die Schule und Unterricht gestalten, also die Lehrerinnen und Lehrer. Nur wenn sie gut ausgebildet und hoch motiviert sind, kann qualitätvoller und erfolgreicher Unterricht stattfinden.

Wie können wir interessierte Lehrerinnen und Lehrer mit unserer SINUS-Philosophie vertraut machen? Wie können wir erreichen, dass in noch mehr Schulen Bewegung in den Mathematikunterricht hinein kommt, dass sich möglichst viele auf den SINUS-Weg begeben?

Ein erster Schritt ist ein bewusstes Nachdenken über das eigene Unterrichten, u. zw. unter bestimmten Leitideen. Zusammen mit einer inhaltlichen Beschreibung des Servers und einer Anleitung zu dessen Nutzung haben wir diese Leitideen in eine Broschüre gepackt, die die SINUS-Schulen noch in diesem Jahr zugeschickt bekommen. (Für Ungeduldige gibt es die Broschüre bereits als pdf-Dokument auf dem Server.)

Eine der Leitideen ist das Überdenken der eigenen Rolle als Mathematiklehrerin, als Mathematiklehrer. Damit meine ich u.a.:

- Zeigen Sie Ihre Begeisterung für die Mathematik.
- Machen Sie immer wieder auf die Bedeutung der Mathematik aufmerksam, und zwar in kultureller, technischer und wirtschaftlicher Hinsicht.
- Vermitteln Sie durch Ihren Unterricht, dass Mathematik eine lebendige, sich ständig weiterentwickelnde Disziplin ist.

Allein das Berücksichtigen dieser Aspekte bewirkt bereits eine positivere Einstellung zum Fach Mathematik - bei den Lehrern und bei den Schülern. Und das ist die Voraussetzung, dass der Mathematikunterricht in Bewegung kommt und dass er anschließend in Bewegung bleibt. SINUS hat den Weg aufgezeigt. Wir dürfen nicht aufhören, ihn weiter zu gehen. Die Aufforderung eines weiteren ZEIT-Zeugen, nämlich von Thomas KERSTAN aus dem Jahr 2003, ist weiterhin aktuell. Er forderte damals:
--> Erfolgsgeschichte . Bitte weiterschreiben.

Ich danke allen, die in den vergangenen Jahren so engagiert an der Erfolgsgeschichte SINUS mitgewirkt haben. Ich danke allen, die bereit sind, sich auch in Zukunft für eine Weiterentwicklung der SINUS-Ideen zu engagieren. SINUS wird weiterleben, SINUS muss weiterleben. Den Grund dafür nennt Henry FORD:

> „Die Wettbewerbsfähigkeit eines Landes beginnt nicht in der Fabrikhalle oder im Forschungslabor. Sie beginnt im Klassenzimmer.“

Prof. Dr. Peter Baptist
Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Didaktik der Informatik
D – 95440 Bayreuth

Peter.Baptist@uni-bayreuth.de