BLK-PROGRAMM

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Erfahren von Kompetenzzuwachs im Mathematikunterricht

Unterrichtsbeispiele zu Modul 5

M. Hertrampf

Oktober 1999

Inhalt

1 Vorwort

Wie die Ergebnisse der TIMS-Studie gezeigt haben, ist im Verlauf der vergleichsweise langen Mathematikausbildung der deutschen Schülerinnen und Schüler ein auffallend geringer Lernzuwachs zu verzeichnen, und die Lernmotivation nimmt sogar mit der Schuldauer ab. Angesichts dieser alarmierenden Befunde lautet einer der in [03] formulierten Arbeitsschwerpunkte des BLK-Programms zur *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*:
„Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen“ (Modul 5).
Kumulatives Lernen setzt voraus, dass Unterrichtsstoffe nicht einfach in additiven Sequenzen, sondern bewusst aufeinander bezogen und methodisch miteinander vernetzt behandelt werden. Kompetenzzuwachs kann nur erfahrbar werden, wenn neue Lernsituationen auf der Grundlage bereits vorhandener Erfahrungen eine Art *Resonanz* (gegenseitige Verstärkung) erzeugen: Das neu zu Lernende stützt sich auf vorhandene Wissenselemente und wirkt auf sie zurück im Sinne einer zunehmenden Differenzierung und Strukturierung.

Der vorliegende Text erläutert anhand von Beispielen aus dem Bereich der Sekundarstufe I verschiedene sich ergänzende Methoden, den Unterricht im Fach Mathematik so zu gestalten, dass derartige Rückkopplungen für die Lernenden wahrnehmbar werden. Im Einzelnen werden unterschieden:
Resonanzeffekte, die

- durch den Rückgriff auf Alltagserfahrungen erzielt werden (Kap. 2),
- durch kreativen Umgang mit Darstellungsformen entstehen (Kap. 3),
- durch Vernetzung von Curriculumelementen zustande kommen (Kap. 4).

Dazu muss bemerkt werden, dass die Unterrichtsbeispiele, die im zweiten Teil eines jeden Kapitels angeführt werden, nicht ausschließlich den in diesem Kapitel erläuterten Aspekt verdeutlichen, sondern sich mehr oder weniger auch den anderen Kapiteln zuordnen lassen. Da die Aufgaben nicht nach einem algorithmischen Schema zu bearbeiten sind, sondern individuelle und mehrperspektivische Sichtweisen unterstützen, dienen sie zugleich als Beitrag zu Modul 1 (*„Entwicklung der Aufgabenkultur“*).

In [03] wird unter *„Bildungstheoretische Ausgangsannahmen der Expertise“* festgestellt: „Teil einer zukunftsfähigen Allgemeinbildung sind ... Fähigkeiten der Selbstorganisation und Selbstregulation des Lernens einschließlich der Bereitschaft, selbständig weiterzulernen, und der Fähigkeit, Durststrecken im Lernprozess zu überstehen.“ Solche Fähigkeiten werden als *metakognitive Kompetenzen* bezeichnet.

Alle in den folgenden drei Kapiteln vorgestellten Unterrichtsbeispiele sind darauf angelegt, auch im metakognitiven Bereich Resonanzen zu erzeugen: Zum einen geht es darum, den einzelnen Schüler stärker in die inhaltliche Weiterentwicklung des Unterrichts einzubeziehen. Zum anderen bieten kooperative Arbeitsformen den Gruppenmitgliedern die Gelegenheit, ihre Lernfortschritte gegenseitig zu spiegeln und zu verstärken.
Damit sind zwei weitere Module des BLK-Programms angesprochen, die einen bedeutsamen Beitrag zur Unterstützung der Arbeit an Modul 5 leisten:
„Entwicklung von Aufgaben für die Kooperation von Schülern“ (Modul 8),
„Verantwortung für das eigene Lernen stärken“ (Modul 9).

Wie die Videostudien im Rahmen von TIMSS eindrucksvoll belegen, lässt das *fragend-entwickelnde* Unterrichtskonzept den Lernenden wenig Raum für die Entfaltung individueller oder kooperativer Problemlösungsstrategien. Dieses Unterrichtsskript muss demnach durch andere Formen der Gestaltung von Unterricht ergänzt und bereichert werden, wenn Kompetenzzuwachs im Fach Mathematik erfahrbar werden soll.

2 Erfahren von Kompetenzzuwachs durch erfahrungsbasiertes Lernen

2.1 Aufbau von Wissen durch aktives Lernen

Aus der Interpretation der Theorie der kognitiven Entwicklung von J. Piaget wurde das sog. *operative Prinzip* als eines der wichtigsten mathematikdidaktischen Prinzipien abgeleitet. Dieses Prinzip verlangt, dass mathematische Operationen auf die ihnen zugrunde liegenden Handlungszusammenhänge zurückgeführt werden. Ungeachtet der berechtigten Kritik an seiner Stadientheorie ist Piaget als Wegbereiter einer *konstruktivistischen* Sichtweise des Lernens anzuerkennen. Das Grundprinzip der konstruktivistischen Auffassung (in ihren verschiedenen, z.T. auch kontroversen Positionen) lautet: Lernende müssen ihr Wissen auf der Grundlage ihrer Erfahrungen selbst konstruieren.

Lerntheoretisch gesichert ist die Erkenntnis, dass Wissen *situationsbezogen* aufgebaut und aktiviert wird. Für den Mathematikunterricht bedeutet das, dass das Verständnis für das sinnvolle Anwenden von Operationen sich in situativen Kontexten entwickelt. Wirft man einen Blick in die gängigen Schulbücher, dann stellt man allerdings fest, dass über weite Strecken kalkülhafte Techniken geübt werden, ohne dass die Fantasie und Vorstellungskraft der Lernenden in irgend einer Weise angesprochen wird. Dies gilt in besonderem Maße für die Behandlung des Themas „Termumformungen“. Wie schädlich sich der automatische, sinnentleerte Umgang mit Operationen letztlich auswirkt, zeigt folgende Begebenheit:

Einer Gruppe von ca. 20 Studierenden des Lehramts an Grund- und Hauptschulen wurde die Gleichung $\frac{a+b}{n} \cdot \frac{c}{n} = \frac{d}{n}$ vorgelegt. Die Studierenden wurden befragt, ob man die Nenner weglassen darf, d.h. ob eine Äquivalenz besteht zu $(a + b) \cdot c = d$. Die Mehrheit der Befragten bejahte dies mit der Begründung: „Gleiche Nenner kann man weglassen.“

Wenn sich der Aufbau von Wissen in einem individuellen Anpassungsprozess an Situationen vollzieht, dann macht es wenig Sinn, Rechentechniken allein zum Zweck späterer Verwendung einzuüben. Aktives, verstehendes Lernen unter Einbeziehung der außerschulischen Handlungskompetenz ist die Basis für das Erfahren von Kompetenzzuwachs im Mathematikunterricht. Da aber schulisches Lernen i.d.R. nicht in natürlichen Lernumgebungen stattfindet, müssen im Unterricht *Modelle* von Sachsituationen, die einer mathematischen Behandlung zugänglich sind, konstruiert werden.

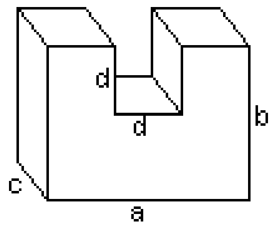
Die in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Visualisierungsübungen beziehen sich auf Rauminhalte zusammengesetzter Körper. Die aufgestellten Volumenterme bilden die individuell verschiedenen gedanklichen Konstruktionen der Schüler ab. Sie sind im Sinne Piagets der symbolische Ausdruck einer gedachten Handlung, wie z.B. das Herausschneiden oder Anfügen eines Quaders. Alle durchgeführten Termumformungen spiegeln absichtsvolle Umstrukturierungen der visuellen Objekte wider. Die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität und Distributivität werden hierbei unmittelbar erfahrbar.

Um dasselbe methodische Prinzip geht es in Abschnitt 2.2.2 bei der Untersuchung funktionaler Zusammenhänge. Die verschiedenen Funktionsgrafen bilden Beobachtungen beim Umgang mit realen Gegenständen ab. Dabei steht das Erfassen und Lösen des *Problems* im Vordergrund und nicht die Funktion, die zur Beschreibung des Problems verwendet wird. Eine primäre, aber leider oft vernachlässigte Aufgabe des Mathematikunterrichts besteht darin, die Fähigkeit zur Problem*erkennung* zu schulen. Sie erfordert die differenzierte Wahrnehmung von Abhängigkeiten zwischen mathematisch erfassbaren Größen. Das genaue Analysieren von Abläufen und Zusammenhängen ist die Voraussetzung für die Entwicklung problembezogener mathematischer Techniken. Umgekehrt fördert die Reflexion der mathematischen Denkansätze ein differenzierteres Beobachten funktionaler Zusammenhänge im lebensweltlichen Kontext.

2.2 Unterrichtsbeispiele

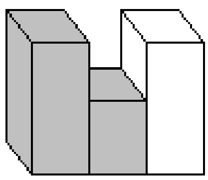
2.2.1 Visualisierung von Termstrukturen

Gegeben ist ein U-förmiger achsensymmetrischer Körper (man kann sich einen Hufeisenmagneten vorstellen):

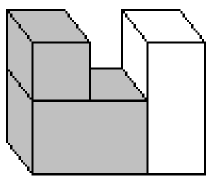


Die noch fehlende Kantenlänge lässt sich ausdrücken durch den Term $\frac{a-d}{2}$.
Mit diesen Vereinbarungen wird das Aufgabenblatt auf der nächsten Seite bearbeitet, u. zw. in Gruppen aus ca. 4 - 6 Schülerinnen und Schülern.
Die Besonderheit der Aufgabe besteht darin, dass die aufgestellten Volumenterme individuelle gedankliche Konstruktionen widerspiegeln. Der Teilkörper in Aufgabe (*a*) läßt sich z.B. auf zwei Arten in zwei Quader zerlegen:

$\frac{a-d}{2} \cdot bc + (b-d)dc$

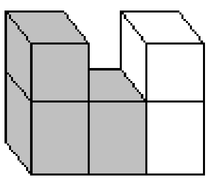


$\frac{a-d}{2} \cdot dc + (\frac{a}{2} + \frac{d}{2})(b-d)c$

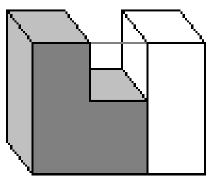


Weitere Darstellungsmöglichkeiten:

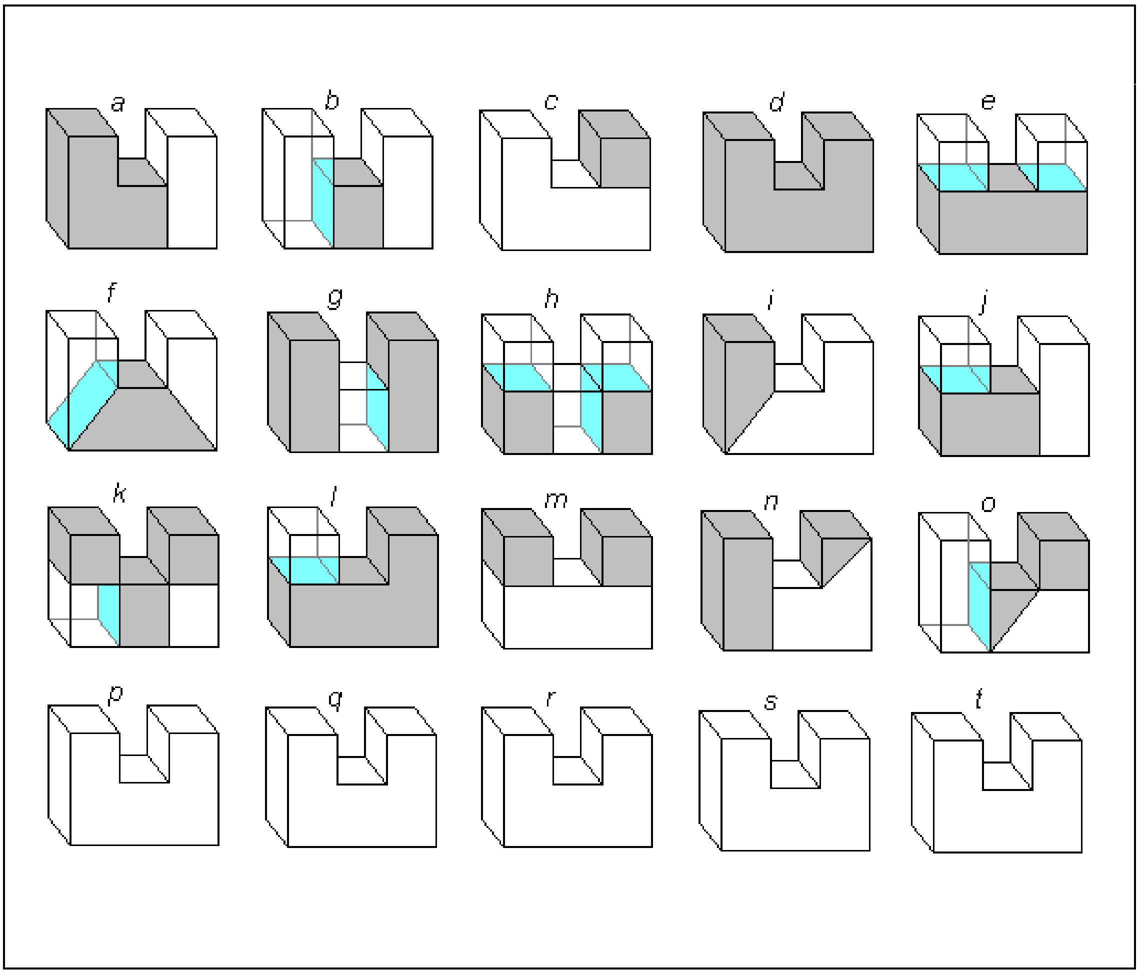
$\frac{a-d}{2}\, dc + \frac{a-d}{2}\, (b-d)\, c + (b-d)\, dc$



$[(\frac{a}{2} + \frac{d}{2}) \cdot b - d^2]\, c$



Arbeitsblatt



Aufgaben (*a*) - (*o*):

Stelle Volumenterme für die grau eingefärbten Teilkörper auf.

Aufgaben (*p*) - (*t*):

Veranschauliche umgekehrt die folgenden Terme:

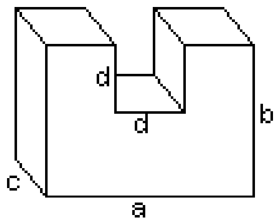
(*p*) $abc - dbc$

(*q*) $ac(b - d) + dc(a - d)$

(*r*) $(a-d)\,\dfrac{b-d}{2}\,c$

(*s*) $\left(\dfrac{a-d}{2} + d\right) bc - d^2 c$

(*t*) $\dfrac{a+d}{2}(b - d)\,c + \dfrac{a-d}{2}\,bc$



Ein wichtiges Lernziel ist die Fähigkeit zum Erkennen der *Strukturen* von Termen. Hierfür erweist sich die zweigeteilte Aufgabenstellung als hilfreich: Bei den Aufgaben (p) – (t) kann man die Ergebnisse von (a) – (o) als Visualisierungshilfe benutzen und nach dem Baukastenprinzip die entsprechenden Körper zusammensetzen. Beim Lösen von Aufgabe (t) hilft beispielsweise das Betrachten der Aufgaben (f), (j) und (n).

Auch innerhalb des ersten Teils der Aufgabenstellung kommt das Baukastenprinzip ständig zur Anwendung. Wenn die verschiedenen Zerlegungen bei Aufgabe (a) durchgespielt sind, können daraus letztendlich alle gesuchten Terme bis einschließlich der Lösung von (o) gebildet werden. Solche zusammengebastelten Terme werden mitunter sperrig und wecken den Wunsch nach Vereinfachung, was den Nutzen verschiedener Rechengesetze deutlich macht und zugleich diese Gesetze veranschaulicht.

Es wurde bereits gesagt, dass die Aufgabe für Gruppenarbeit konzipiert ist. Es gibt vielfältige Möglichkeiten, wie die Gruppenmitglieder ihre Zusammenarbeit gestalten können. Zum Beispiel können sich innerhalb einer Gruppe Paare bilden. Gesetzt den Fall, Ines hat als Lösung der Aufgabe (*h*) den Term $(a - d)(b - d)c$ aufgestellt. Ihr Partner Lukas hat jedoch - unter Verwendung der Ergebnisse von (*g*) und (*c*) - folgenden Term gebildet: $(a - d)bc - (a - d)dc$. Nun kann Ines versuchen, ihren Term in den von Lukas umzuformen, und umgekehrt. Die Partner können wechselseitig „aufeinander zu rechnen“.

Die Gruppen können das Arbeitsblatt weiter benutzen, um sich neue Aufgabensets zusammenzustellen. Man kann vereinbaren, daß die Großbuchstaben $A, B, C,$ ... für die Volumina der unter (*a*), (*b*), (*c*), ... dargestellten Teilkörper stehen. Die Abbildungen offenbaren viele Arten von Beziehungen, die sich rechnerisch bestätigen lassen. So ist z.B.

$$F = J, \quad E + M = D, \quad A = \tfrac{1}{2}\, G + B, \quad K - M = D - G\ ,$$

und es lassen sich unzählige weitere Identitäten finden.

Als Fortsetzung der Unterrichtseinheit bietet es sich an, dass die Gruppen anstelle des U-förmigen Körpers eine andere Buchstabenform ihrer Wahl betrachten, vielleicht das A oder das B (oder das unten abgerundete U). Auf diese Weise kommen auch die geometrischen Eigenschaften schräger und runder Körper ins Spiel. Die nicht lehrer-, sondern gruppenzentrierte Arbeitsform lässt das verständnisvolle Lernen auf unterschiedlichen Niveaus zu (siehe hierzu Modul 4 der BLK-Expertise). Die Gruppenmitglieder stellen sich Aufgaben, die sie sich bei gegenseitiger Unterstützung zutrauen, die aber zugleich anspruchsvoll genug sind, um nicht langweilig zu sein (vgl. Zielsetzung von Modul 9).

Worin besteht nun der Kompetenzzuwachs?

Im Verlauf der Gruppenarbeit werden vermutlich alle Teilnehmer - unabhängig vom individuellen Leistungsstand - feststellen, dass sie mit „unhandlichen" Termen besser umgehen können, dass sie einen „längeren Atem" haben und sich von komplizierten Termen nicht abschrecken lassen. Dies sind Kompetenzen, die vorwiegend dem metakognitiven Bereich zuzuordnen sind. Ein Zuwachs an kognitiven Fähigkeiten zeigt sich vor allem im sicheren Erkennen von Termstrukturen. Die Schülerinnen und Schüler sind nach dieser Übung auch bei komplexeren Ausdrücken in der Lage, z.B. einen Volumenterm von einem Flächenterm zu unterscheiden. Hinzu kommt ein durch die Anschauung vertieftes Verständnis für die Anwendung des Distributivgesetzes.

Wesentliche Grundlage des Lerneffekts ist die Verknüpfung von bildlicher und symbolischer Repräsentation. Das 3. Kapitel widmet sich noch einmal gesondert der aufeinander bezogenen Verwendung unterschiedlicher Repräsentationsformen. Das erforderliche Einbeziehen visueller und lebensweltlicher Erfahrungen in den Mathematikunterricht ist durch das Vorhandensein der modernen Medien (Computergrafik, Computeralgebrasysteme) heute viel leichter zu realisieren als früher. In [05] findet man interessante Anregungen zu einer Behandlung des Themas „Umgang mit Termen" unter Verwendung von CAS.

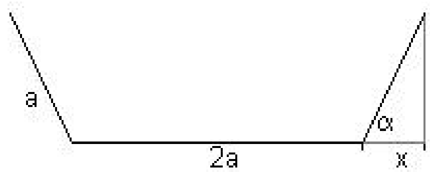
2.2.2 Extremwertbetrachtungen in der Sekundarstufe I

Am 2.7.97 wurde der Wetterbericht des ZDF aus dem Schwarzwaldstädtchen *Gengenbach* gesendet. Während es in anderen Ortschaften üblich ist, dass die Straße über den Bach führt, ist es in Gengenbach umgekehrt: Der dortige Klosterbach wird in einer Rinne über die Straße geleitet.

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Rinne einen rechteckigen Querschnitt hat, etwa mit dem Seitenverhältnis 2:1. Beschränkt man sich auf rechteckige Querschnitte, dann ist dieses Verhältnis optimal hinsichtlich des Fassungsvermögens der Rinne (das Extremum einer quadratischen Funktion lässt sich in der Sekundarstufe I bestimmen).

Der Querschnitt eines Flussbetts ist gewöhnlich trapezförmig und nicht rechteckig. Es stellt sich somit die Frage, ob man das Fassungsvermögen des künstlichen Bachbetts durch Schrägstellen der Seitenwände maximieren kann. Mit Sicherheit wird aus den Reihen der Schüler der Vorschlag kommen, ein Modell zu basteln. Da dieses wegen der aufklappbaren Seitenwände vermutlich nicht wasserdicht ist, sollte man für die Füllversuche ein Granulat verwenden.

Die im Experiment zu beobachtende Zu- und Abnahme des Fassungsvermögens beim Schrägstellen der Rinnenwände lässt sich auf die entsprechende Veränderung der trapezförmigen Querschnittsfläche zurückführen. Diese wird als Funktion in einem Koordinatensystem dargestellt. Es bleibt den Lerngruppen überlassen, ob sie x oder a als Variable verwenden (siehe Abb.). Grundsätzlich ist es günstig, wenn verschiedene Schülergruppen voneinander abweichende Ansätze wählen. Die Erfahrung, dass unterschiedliche Vorgehensweisen gleichermaßen zum Erfolg führen können, ist ganz im Sinn von Modul 1 (*Weiterentwicklung der Aufgabenkultur*). Ebenso ist es möglich, die Trapeze für verschiedene Winkel α zu zeichnen und die Flächeninhalte aus der Zeichnung abzulesen (vgl. Modul 4: *„Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus“*).



Die Trapezfläche A, wahlweise ausgedrückt als Funktion von a oder von x:

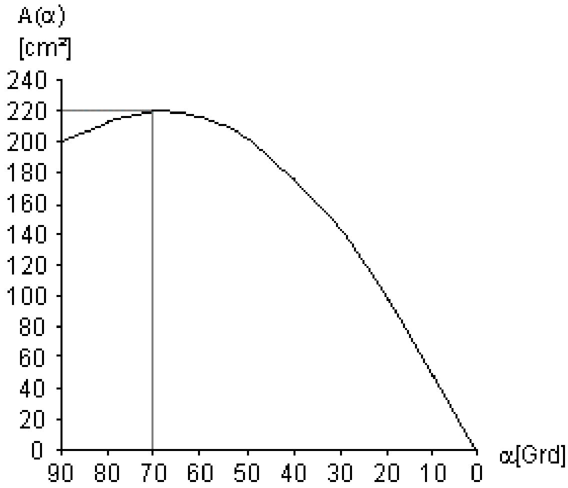
$$A(\alpha) = a^2 \sin \alpha \, (2 + \cos \alpha) \qquad\qquad A(x) = (2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

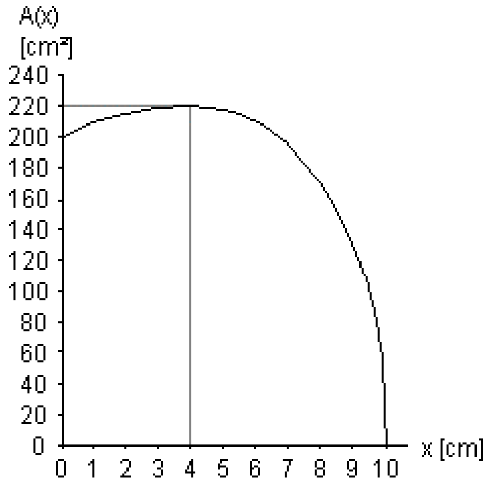
$$90° \geq \alpha \geq 0° \qquad\qquad 0 \leq x \leq a$$

Damit die Rechenergebnisse experimentell bestätigt werden können und umgekehrt, empfiehlt es sich, für die Strecke a die reale Abmessung des Modells zu verwenden. Wenn also ein Modell mit $a = 10\text{ cm}$ zur Verfügung steht, dann lauten die Formeln für die Querschnittsfläche (in cm^2):

$$A(a) = 100 \sin a\,(2 + \cos a)$$
$$90° \geq a \geq 0°$$

$$A(x) = (20 + x)\sqrt{100 - x^2}$$
$$0 \leq x \leq 10$$





α	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0 [Grd]
A	200	214	220	216	202	178	143	101	52	0 [cm²]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 [cm]
A	200	208	216	219	220	217	208	193	168	126	0 [cm²]

Die Koordinate x = 4 cm entspricht nicht ganz dem Winkel a = 70°. Durch Verfeinerung der Wertetafeln lässt sich das Ergebnis aber nur unwesentlich verbessern.

Durch Schrägstellen der Seitenwände lässt sich also die Querschnittsfläche von 200 cm² auf 220 cm² (d.h. um 10%) vergrößern.

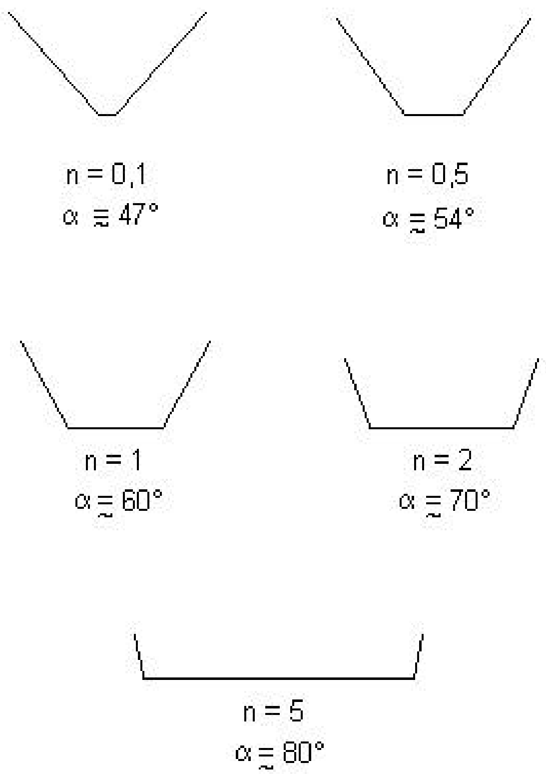
Viele Menschen sind von dem Ergebnis überrascht. Sie rechnen damit, dass das Fassungsvermögen monoton abnimmt. Mit Problemstellungen dieser Art verhilft der Mathematikunterricht zu differenzierteren Sichtweisen und zur Korrektur ungenauer oder falscher Alltagsvorstellungen, wodurch Kompetenzzuwachs subjektiv erfahrbar wird.

Die neue Erkenntnis setzt einen kumulativen Lernprozess in Gang, denn die unter den *gegebenen* Bedingungen optimierte Rinnenform läßt sich unter *veränderten* Bedingungen vermutlich noch weiter optimieren. Bleibt man zunächst einmal bei der Trapezform, dann wäre zu hinterfragen, ob man wirklich von der optimalen Rechteckform ausgehen sollte.

Da sich durch Schrägstellen der Seitenwände das Rinnenvolumen vergrößern lässt, ist für die Maximierung der Querschnittsfläche ein anderes Verhältnis von Grundseite und Schenkellänge des Trapezes u.U. günstiger. Wenn z.B. Grundseite und Schenkel gleich lang sind, dann lässt sich bei unverändertem Materialverbrauch eine Rinne mit *größerem* Fassungsvermögen herstellen. Für jedes Verhältnis von Grundseite zu Trapezschenkel gibt es einen spezifischen Winkel, unter dem die Trapezfläche maximal wird.

Optimale trapezförmige Querschnittsformen

Schenkellänge: a Länge der Grundseite: n· a

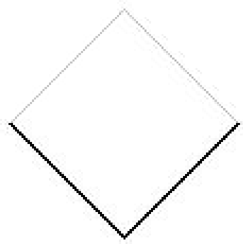


Die Schülerinnen und Schüler werden nach diesen Untersuchungen die im Haushalt verwendeten Schüsseln, Tassen und Wannen mit anderen Augen betrachten. In Übereinstimmung mit dem in Kap. 4 angesprochenen Spiralprinzip sollten solche Beobachtungen durchaus schon in der Sekundarstufe I stattfinden, denn sie stellen eine starke Motivation für die in der Oberstufe zu behandelnden mathematischen Techniken dar.

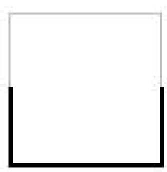
Das Thema könnte auch ohne Anwendung der infinitesimalen Techniken mittels Computereinsatz weiter behandelt werden. Die Problemstellung lautet: Finde den optimalen trapezförmigen Rinnenquerschnitt. „Optimal“ bedeutet: größte Querschnittsfläche bei vorgegebenem Materialaufwand (Summe der Längen der Grundseite und der beiden Schenkel). Wir beschränken uns von Anfang an auf das *symmetrische* Trapez (eine einschränkende Annahme, die man nachträglich gut begründen kann). Der Einsatz des Computers verhindert, dass kostbare Unterrichtszeit durch langwierige Rechnungen verloren geht. *Ein Hauptproblem des Mathematikunterrichts besteht darin, dass oft aus vermeintlichem Zeitmangel die „geistige Durchdringung“ der mathematischen Zusammenhänge zu kurz kommt.*

Bei dem hier vorgestellten Aufgabentyp kommt es in besonderem Maße darauf an, das Augenmerk auf die verschiedenen Extremfälle zu richten, um die in der Praxis auftretenden Umfang-Fläche-Relationen nicht nur rechentechnisch bearbeiten, sondern auch von der Anschauung her einschätzen zu können (vgl. Heymann [04]). Insbesondere über die folgenden zwei Spezialfälle sollte gründlich nachgedacht werden (Schenkel a, Grundseite na):

a) n = 0

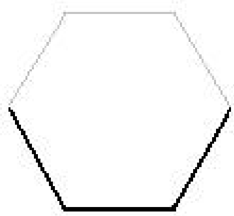


Der 45°-Winkel ist optimal. Fügt man zwei solche Rinnen zu einem Rohr zusammen, dann hat dieses den optimalen (=quadratischen) *Rhomben*querschnitt. So sieht man nun auch, weshalb sich für n=2 die optimale rechteckige Rinnenform ergibt. Ergänzt man diese Form in analoger Weise, erhält man das Quadrat als optimalen *Rechteck*querschnitt:

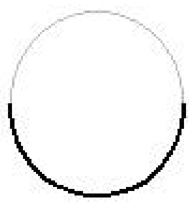


b) n = 1

Der Übersicht auf S. 14 ist zu entnehmen, dass ein Winkel von etwa 60° günstig ist. Nach den Überlegungen unter (a) kann man davon ausgehen, dass sich die maximale Fläche *genau* bei 60° ergibt. Das *reguläre* Sechseck ist sogar die optimale Querschnittsform unter *allen* Sechseckformen.

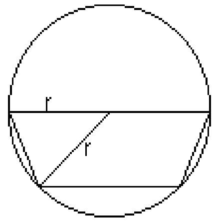


Aus gutem Grund haben *Dachrinnen* einen halbkreisförmigen Querschnitt. Es entspricht der praktischen Erfahrung, dass ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt durchlässiger ist als ein wie auch immer zusammengedrücktes Rohr. Deshalb nimmt ein Schwimmreifen beim Aufblasen eine kreisrunde Querschnittsform an.



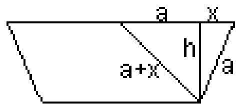
Die *regulären* n-Ecke stellen die beste Annäherung an die Kreisform dar.

Die Beobachtung, dass durch **Einbettung des Sechsecks in den Kreis** der optimale trapezförmige Rinnenquerschnitt gefunden wird, bestätigt sich auch dann, wenn es sich gemäß Aufgabenstellung nicht um ein reguläres Sechseck handelt. Bei dem eingangs vorgestellten Beispiel (Seitenverhältnis 2:1) ergab sich diese Optimallösung:



Die Bedingung dafür, dass das durch Spiegelung des Trapezes entstehende Sechseck sich in einen Kreis einpassen lässt, lautet (siehe Abb.):

$$(a + x)^2 = a^2 + h^2$$



Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen a und x:

$$\boxed{a^2 - x^2 = (2a + x)\,x}$$

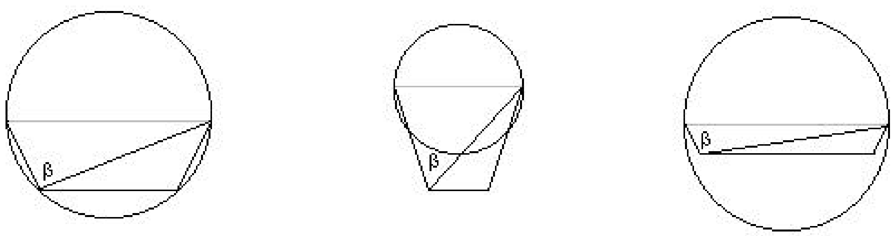
Die Vermutung lässt sich mit Mitteln der Analysis verifizieren: Differenziert man die Flächeninhaltsfunktion $A(x) = (2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ nach x, so ergibt sich aus der notwendigen Bedingung $A'(x) = 0$ die oben formulierte Beziehung.

<u>Allgemein:</u> Ist n:1 das Verhältnis von Grundseite zu Schenkel, dann lautet die Beziehung:

$$\boxed{a^2 - x^2 = (na + x)\,x}$$

Wenn man auch den mathematisch-formalen Nachweis in der Mittelstufe noch nicht erbringen kann, so kann man sich doch schon über die folgende praktische Konsequenz klar werden:

Mit Hilfe des *Thalessatzes* lässt sich sehr leicht feststellen, ob bei einem gegebenen Querschnitt die Neigung der Trapezschenkel optimal ist.



optimal, da $\beta = 90°$ suboptimal, da $\beta \neq 90°$

Der Leser kann bei den Trapezen auf Seite 14 die Probe machen.

Wie man sieht, ist eine erschöpfende Behandlung des Themas in einer Unterrichtseinheit nicht möglich. Die Aufgabenstellung kann man im Sinne von Modul 1 völlig offen lassen – das Foto aus Gengenbach und ein Wetterbericht über sintflutartige Regenfälle regen schon zum Nachdenken an.

Extremwertprobleme eignen sich besonders gut für einen *fachübergreifenden* Mathematikunterricht (hier wird Modul 6 der BLK-Expertise angesprochen). Mit Blick auf die belebte Natur, also im Biologieunterricht, wäre beispielsweise zu fragen, warum der Elefant so große Ohren hat und warum Kakteen vorzugsweise eine zylindrische oder kugelige Form annehmen. Die Bemerkung auf S.16 über den Schwimmreifen weist auf eine mögliche Verbindung zum Physikunterricht hin.

Das Rinnenbeispiel verdeutlicht sehr gut, in welcher Hinsicht Aufgaben mit direktem Realitätsbezug das Erfahren von Kompetenzzuwachs begünstigen:
Die Anwendbarkeit in der Praxis motiviert einerseits zu einer interessengeleiteten Auseinandersetzung mit verwandten Problemtypen, was die Fähigkeit zur Unterscheidung und Klassifizierung der Probleme und zur Transferierung und Weiterentwicklung der Lösungsmethoden steigert (also die Kumulativität des Lernens). Andererseits verlangen offene Problemsituationen eine intensive Reflexion der *Voraussetzungen und Bedingungen* der angewandten Techniken und eine darauf bezogene Interpretation der Ergebnisse. Die Entwicklung dieser Fähigkeit zur Reflexion bedeutet eine wachsende Autonomie im Lernprozess, ohne die Lernende sich nicht wirklich als kompetent erfahren können.

3 Erfahren von Kompetenzzuwachs durch Variation der Darstellungsformen

3.1 Die Bedeutung der verschiedenen Repräsentationsmodi

Gemäß dem operativen Prinzip werden im Anfangsunterricht die grundlegenden mathematischen Techniken *enaktiv*, d.h. anhand von konkretem Material, erarbeitet. Daneben werden - vor allem in den Schulbüchern für die ersten Jahre - bildliche (*ikonische*) Darstellungen von mathematisch relevanten Sachverhalten verwendet. In den späteren Jahrgängen tritt die *symbolische* Form, also die Darstellung mittels Zeichen, in den Vordergrund.
Letzteres darf aber nicht so verstanden werden, daß die beiden anderen Repräsentationsformen dann überflüssig sind und generell durch symbolische Darstellungen abgelöst werden sollen. Tatsächlich sind alle drei Repräsentationsmodi in jeder Phase der Mathematikausbildung von Bedeutung. Bei genauerer Analyse von Problemlösungsprozessen im Fach Mathematik stellt man fest, daß sich die verschiedenen Darstellungsweisen gegenseitig stützen und ergänzen („Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen"; siehe [09], S. 158).

Das vorbereitende Gutachten zum BLK-Programm hebt die Bedeutung der Vermittlung *anschlussfähigen* Wissens hervor ([03], Kap. 2). Zur Anschlussfähigkeit des Wissens als einer Grundvoraussetzung für das Erfahren von Kompetenz*zuwachs* ist die Fähigkeit zum Erkennen von Zusammenhängen und Querverbindungen unerlässlich. Damit Wissen kumulativ aufgebaut werden kann, müssen Schüler in der Lage sein, Anknüpfungspunkte zum bisher Gelernten zu finden, *auch wenn dieses Wissen in anderer Weise repräsentiert ist.* Die Fähigkeit zum Transfer von Darstellungsformen muss deshalb im Unterricht ausgebildet werden.

Je vielfältiger die beim Lernenden vorhandenen Wissenselemente bereits repräsentiert sind und je flexibler sie sich somit vernetzen lassen, desto leichter lässt sich das Netz ausbauen und desto stärker werden Lernfortschritte spürbar.

Bei der in Abschnitt 3.2.1 behandelten Tortenaufgabe wird das Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen deutlich. Enaktive, ikonische und symbolische Formen wechseln sich im Verlauf des Problemlösungsprozesses mehrfach ab.

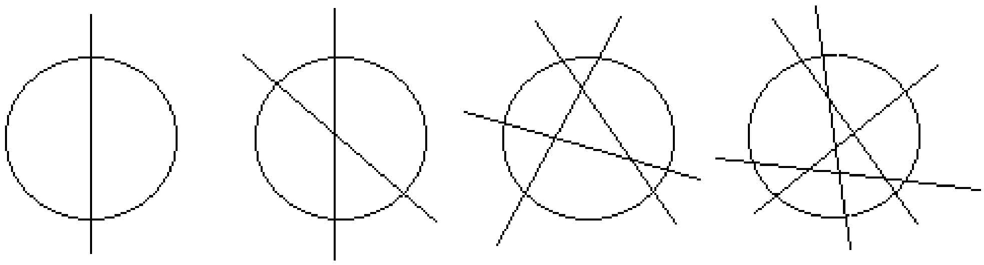
Die Anregungen in Abschnitt 3.2.2 beziehen sich auf Muster in Zahlentafeln, also auf die Interaktion von symbolischer und ikonischer Repräsentation. Hier geht es im Besonderen um das Erarbeiten anschlussfähigen Wissens. Für die Primarstufe existiert bereits ein didaktisch-methodisches Konzept mit einem Schwerpunkt auf dem entdeckenden Lernen anhand von Zahlentafeln: das „programm mathe 2000“ (Wittmann et al., [10]). Wie eine Weiterführung in der Orientierungsstufe und darüber hinaus aussehen könnte, wird am Beispiel „Teilbarkeit“ gezeigt.

3.2 Unterrichtsbeispiele

3.2.1 Interaktion der Darstellungsformen beim Lösen eines kombinatorischen Problems

Die Unterrichtseinheit lautet: „*Unsere Lehrerin hat Geburtstag und spendiert eine Torte*.“ Damit die Geburtstagsfeier nicht langweilig wird, hat sich die Lehrerin ein Spiel ausgedacht:
Die Torte soll durch gerade, durchgehende Schnitte geteilt werden, wobei es auf Form und Größe der Stücke nicht ankommt. Es ist, bezogen auf die Zahl der Schnitte, die größtmögliche Stückzahl zu erreichen.

1) Probieren geht über Studieren. In diesem Sinne wird man die Aufgabe zunächst *enaktiv* angehen.
2) Wenn die Torte nur noch aus Krümeln besteht, bevor das Problem eine allgemein akzeptierte Lösung gefunden hat, erfolgt zweckmäßigerweise ein Übergang zur *ikonischen* Darstellung: Die Tafel im Klassenzimmer steht zur Verfügung zum Malen von Tortenbildern. Dabei versuchen die Schülerinnen und Schüler, durch Vergleich ihrer Skizzen die günstigsten Schnittführungen herauszufinden:



3) Die Ergebnisse des Ausprobierens werden *symbolisch* in einer Tabelle festgehalten:

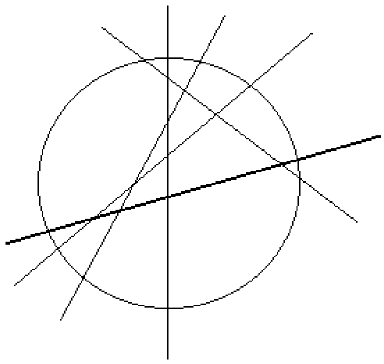
n	0	1	2	3	4	.....	Schnitte
s(n)	1	2	4	7	11	.....	Stücke

$\xrightarrow[+1]{}$ $\xrightarrow[+2]{}$ $\xrightarrow[+3]{}$ $\xrightarrow[+4]{}$

Durch den Wechsel zur symbolischen Darstellungsweise scheint die Klasse einer Gesetzmäßigkeit auf die Spur gekommen zu sein. Danach müssten sich mit 5 Schnitten 16 Stücke erzielen lassen.

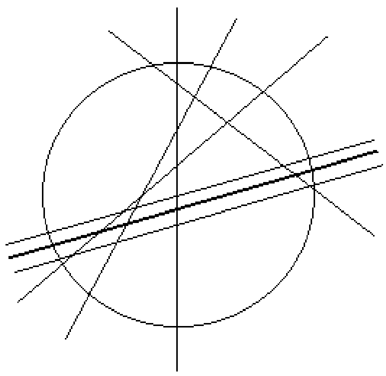
4) Die Gastgeberin holt eine Pizza aus dem Kühlschrank im Lehrerzimmer. Ob es wohl gelingt, sie mit 5 Schnitten in 16 Stücke zu zerlegen?

In der Tat ist an dieser Stelle ein Wechsel zurück zum *enaktiven* Modus angebracht. Denn eine Vermutung verlangt danach, durch einen gezielten Versuch in der Praxis bestätigt zu werden (vgl. Kap. 2). Die Erfahrung der bisherigen Versuche bis n = 4 lehrt, dass man das beste Ergebnis erzielt, wenn man alle vorhandenen Schnittlinien, aber keinen Schnittpunkt trifft. Die dick hervorgehobene Linie zeigt, wie der Schüler Michael das Messer zum 5. Schnitt ansetzt:



Zur Freude aller entstehen genau 16 Stücke.

5) Um sich und den Geburtstagsgästen das Prinzip richtig klarzumachen, zeichnet die Gastgeberin das Bild der Schnittlinien an die Tafel. Um den letzten Schnitt zeichnet sie einen schmalen Streifen, so dass das Ganze aussieht wie ein Schnitt längs durch ein in Stücke geschnittenes französisches Stangenbrot:

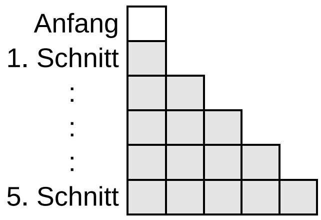


Wie man aus alltäglicher Erfahrung weiß, wird ein Baguette durch n nebeneinander ausgeführte Schnitte in n+1 Stücke geteilt.

Schneidet man anschließend *längs* durch das Brot, d.h. durch alle n+1 Stücke, dann gewinnt man mit diesem (n+1)-ten Schnitt n+1 weitere Stücke hinzu, da aus jedem bisherigen Stück zwei Stücke werden. Also war die Vermutung richtig, dass man beim Tortenteilen mit dem 5. Schnitt 5 Stücke mehr bekommen kann, mit dem 6. Schnitt 6 zusätzliche Stücke, ... usf.

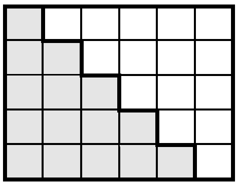
Die Mehrzahl der jungen Leute sieht das Problem jetzt als gelöst an und möchte sich - soweit noch möglich - den Gaumenfreuden zuwenden. Da stellt Anna die unbequeme Frage, wie viele Stücke man mit 100 Schnitten bekommen kann. Zwei Mitschüler erklären sich spontan bereit, ein Computerprogramm für die Tortenaufgabe zu schreiben. Da Anna darauf nicht warten will, gibt die Lehrerin ihr einen Tip: Anna soll die Vermehrung der Kuchenstücke auf Karopapier darstellen. Ein Blick auf die Tabelle ruft das Prinzip in Erinnerung: Mit dem ersten Schnitt kommt ein Stück hinzu, mit dem zweiten Schnitt zwei Stücke ...

6)



Unter jedem quadratischen Kästchen soll man sich ein Kuchenstück vorstellen (kein Problem, denn die Form der Stücke ist bei unserer Fragestellung irrelevant). Am Anfang ist die Torte ganz, besteht also aus einem Stück. In jeder weiteren Zeile der Grafik ist zu sehen, wie viele Stücke durch den jeweiligen Schnitt *dazukommen*. Denkt man sich das oberste Kästchen weg, so hat man eine schöne Treppenfigur.

Die Anzahl der Kästchen lässt sich durch eine einfache Multiplikation bestimmen, wenn man aus zwei Treppen ein Rechteck bastelt. (Man muss dann nur die Zahl der Kästchen im Rechteck halbieren.)



7) Symbolisch lässt sich das bei n Zeilen und n+1 Spalten so ausdrücken:

$$\frac{1}{2} n (n+1)$$

Halt! Wir dürfen das oberste Kästchen über der Treppenfigur nicht vergessen. Die Formel für die Maximalzahl s(n) der Stücke bei n Schnitten lautet also:

$$\boxed{s(n) = 1 + \frac{1}{2} n (n+1)}$$

Das sind immerhin 5051 Stücke bei 100 Schnitten.

Kürzen wir **E**naktiv / **I**konisch / **S**ymbolisch durch die Anfangsbuchstaben ab, so beschreibt E I S E I I S die wechselnde Folge der verwendeten Darstellungsmodi. Dabei haben die einzelnen Darstellungsweisen in verschiedenen Stadien des Problemlösungsprozesses unterschiedliche Funktionen:

E	**I**	**S**	**E**	**I**	**I**	**S**
1	2	3	4	5	6	7

1) Versuche durchführen
2) Versuche bildlich festhalten
3) Versuchsergebnisse geordnet darstellen
4) Überprüfen einer Hypothese
5) Herausarbeiten funktionaler Zusammenhänge
6) Mathematisierung (Schematisierung, Operationalisierung)
7) Codierung der allgemeinen Lösung

Ein entscheidender Schritt bei der Bearbeitung des Problems ist Schritt (6). Bislang konnten die Maximalzahlen der Kuchenstücke nur *rekursiv* berechnet werden, was bei größeren Zahlen ein Computerprogramm erfordern würde. Die mittels Übergang zu einer abstrakteren ikonischen Darstellungsweise entwickelte Formel gestattet es hingegen, s(n) *direkt* zu berechnen. Damit kann auch für große n die Anzahl s(n) noch mit Papier und Bleistift ausgerechnet werden. Anstoß für diesen Lernfortschritt war die Frage einer Mitschülerin. Das Beispiel zeigt somit auch, wie das Erfahren von Kompetenzzuwachs durch die Interaktion in der Klasse gefördert wird.

3.2.2 Entdeckendes Lernen mit Zahlentafeln

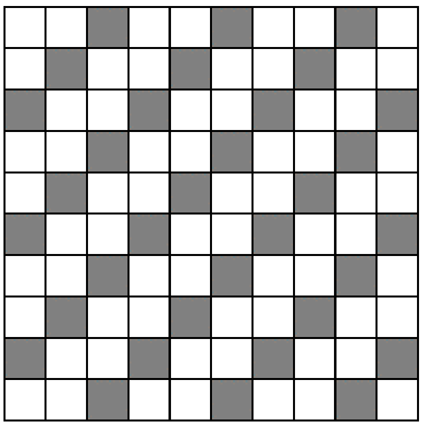
Die Übungen dieses Abschnitts beginnen mit Beispielen, die sich auf das für den Primarstufenunterricht konzipierte Material im „programm mathe 2000“ [10] stützen (Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd.1).

Hundertertafel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23							
							98	99	100

<u>Aufgabe:</u>
Überlege dir für jedes Muster: Welche besondere Eigenschaft haben die Zahlen in den dunklen Kästchen?

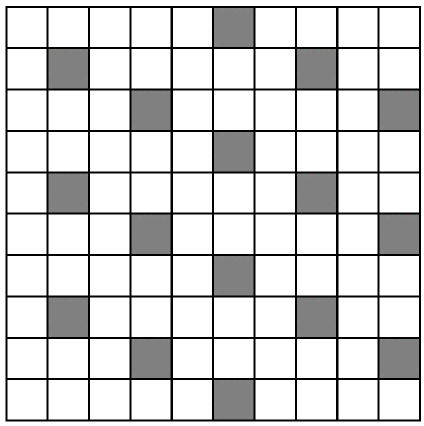
<u>Muster 1</u>



<u>Lösung:</u>
Das Muster wird gebildet von den durch 3 teilbaren Zahlen.

<u>Zusatzfrage:</u>
Auch in jeder *Spalte* gilt: Jede dritte Zahl ist durch 3 teilbar. Warum?

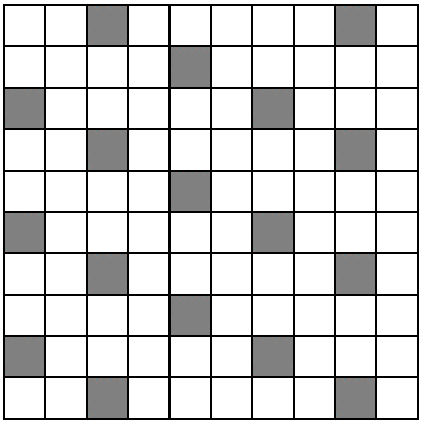
<u>Muster 2</u>



<u>Lösung:</u>
Das Muster wird gebildet von den durch 6 teilbaren Zahlen.

<u>Zusatzfrage:</u>
Zahlen, die eine ungerade Endziffer haben, sind nicht durch 6 teilbar. Warum?

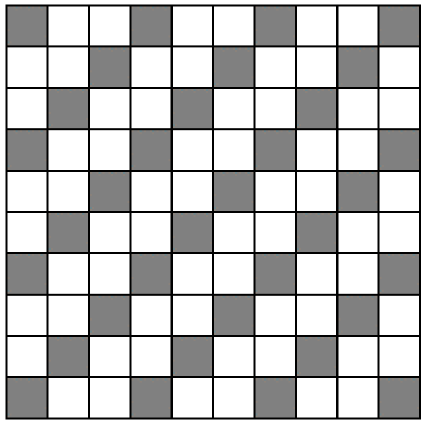
Muster 3



Lösung:
Das Muster wird gebildet von den durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen.

Zusatzaufgabe:
Vergleiche Muster 3 mit Muster 2 und beschreibe, was dir auffällt.

Muster 4

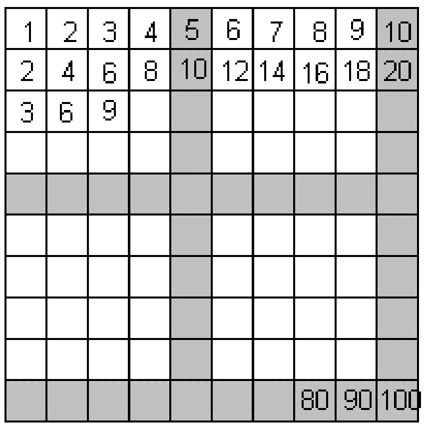


Lösung:
Das Muster wird gebildet von den Zahlen, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 ergeben.

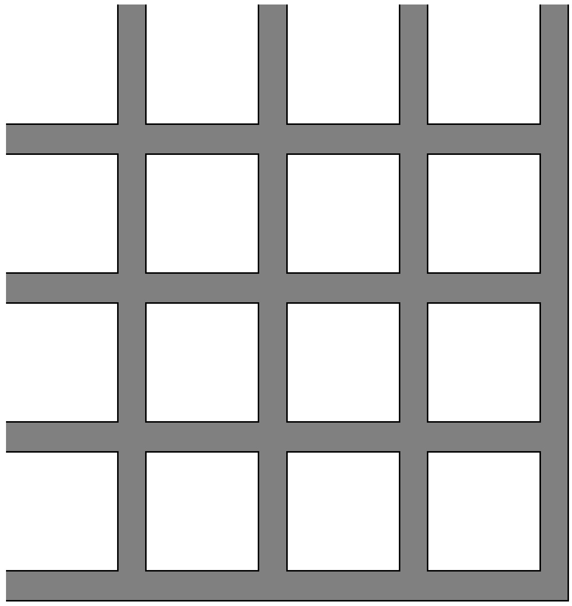
Zusatzaufgabe:
Vergleiche Muster 4 mit Muster 1 und beschreibe, was dir auffällt.

Eine zahlentheoretisch interessante Übung besteht im Darstellen von Teilbarkeitseigenschaften anhand der multiplikativen Verknüpfungstafel, der (1x1) - Tafel. Dabei geht es um die Unterscheidung von zerlegbaren und nicht zerlegbaren (primen) Teilern.

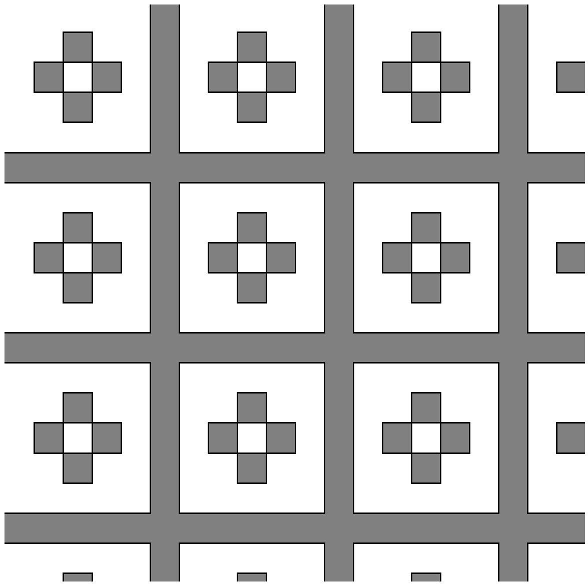
Darstellung der durch 5 teilbaren Produkte in der Tafel des „kleinen 1x1“:



Das Muster setzt sich entsprechend fort, wenn man die Tafel des „großen 1x1“ zugrunde legt:



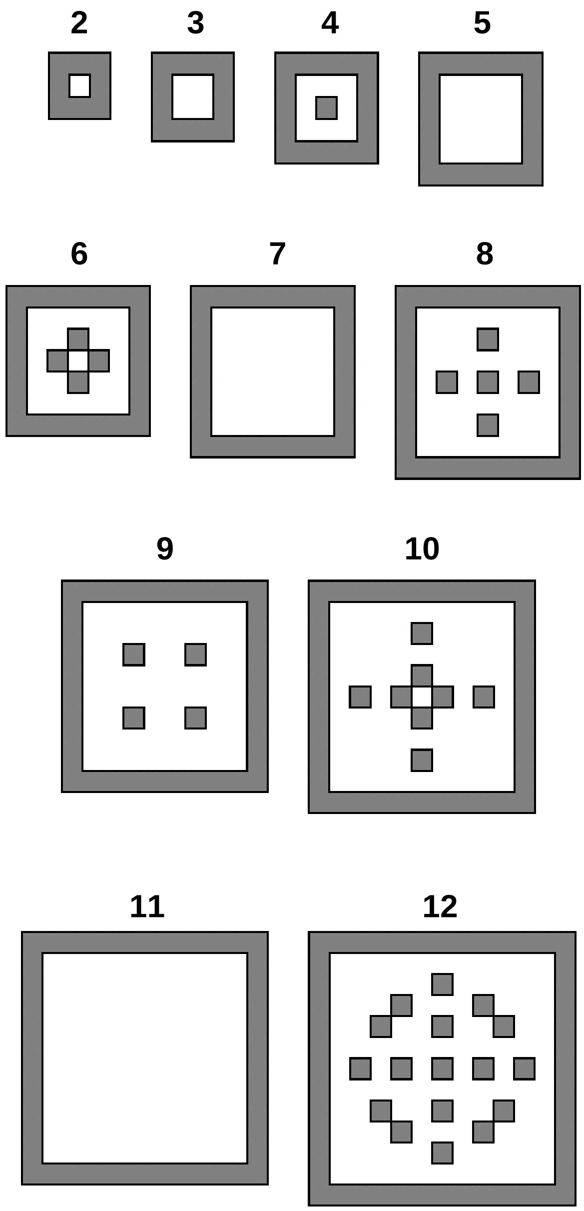
Als wesentlich reizvoller erweist sich das Muster der durch 6 teilbaren Produkte:



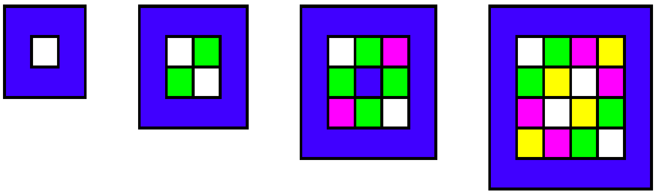
Bei diesen Übungen ist Computereinsatz sinnvoll.

Der Grund für die unterschiedlich gearteten Muster ist leicht gefunden: Es gibt Produkte, die durch 6 teilbar sind, obwohl sich keiner der Faktoren durch 6 teilen lässt. Entsprechendes tritt nicht auf, wenn Teilbarkeit durch 5 betrachtet wird, weil 5 eine Primzahl ist. In solchen Unterscheidungen sind implizit bereits Elemente der algebraischen Zahlentheorie enthalten (*Nullteiler* in Restklassenalgebren). Das Gelernte ist in dieser Richtung anschlussfähig (*„Prinzip des vorwegnehmenden Lernens“*; vgl. [09], S. 86).

Die Maschen der Muster, die die Teilbarkeit der Produkte durch 2, 3, 4, ... , 12 abbilden, sehen wie folgt aus:



Die Bilder werden schön bunt, wenn jeder Restklasse eine bestimmte Farbe zugeordnet wird.



Die verschiedenen Symmetrien und Permutationen geben jeweils Anlass zu der Frage: *Warum ist das so?* Auf diese Weise werden die Lernenden durch eigene Beobachtungen auf algebraische und zahlentheoretische Gesetzmäßigkeiten aufmerksam.

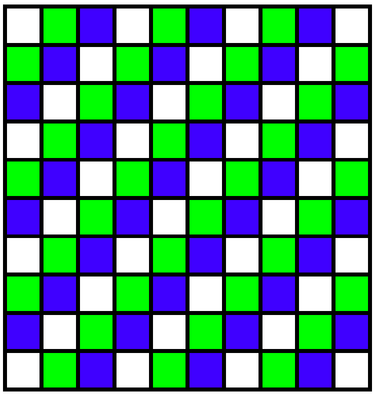
<u>Beispiel rechts</u> (Restklassenmuster modulo 5):

Die Symmetrie bzgl. einer der beiden Diagonalen drückt die Kommutativität der Multiplikation aus. Etwas schwieriger ist die Deutung der anderen diagonalen Symmetrie: Man muss sich klar machen, weshalb $a \cdot b$ bei Division durch 5 denselben Rest lässt wie $(5 - a)(5 - b)$.

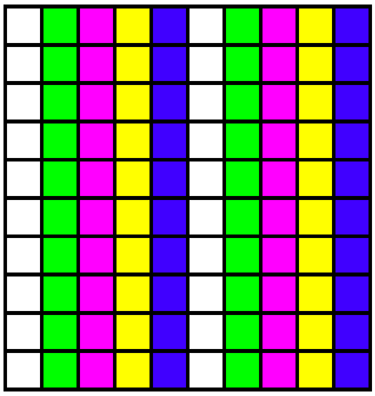
Ebenso aufschlussreich ist die Untersuchung von Restklassenmustern in der Zahlentafel auf Seite 25:

Restklassenmuster bezüglich Division

durch 3



durch 5



Das Restklassenmuster bezüglich Division durch 3 besteht aus Diagonalstreifen. Alle Zahlen auf diesen Streifen haben die gleiche *Quersumme*.

Das vertikale Streifenmuster bezieht sich auf die Division durch 5. Alle Zahlen auf diesen Streifen haben die gleiche *Endziffer*.

Die Beschäftigung mit Restklassenmustern ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, selbständig und auf fast spielerische Weise die verschiedenen Teilbarkeitsregeln herauszuarbeiten. Zugleich werden sie mit Grundzügen der Restklassenalgebra vertraut.

Anschlussfähiges Wissen ist zu einem großen Teil flexibles Methodenwissen. Dabei kommt der Variation von Darstellungsformen eine wesentliche Bedeutung zu. *Bilder* als Träger impliziter Informationen sollten viel mehr als bisher im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Allerdings erhöhen ikonische Darstellungen nur dann das Verständnis mathematischer Zusammenhänge, wenn im Unterricht die Grundlage für das Verstehen der Bilder erarbeitet wird. Insbesondere das eigenständige Verbildlichen von Gesetzmäßigkeiten (und auch das Versprachlichen, das Erklären der Bilder) sollte geübt werden. Je mehr Autonomie in diesem Bereich entwickelt wird, desto nachhaltiger verstärkt sich die Kompetenzerfahrung im Fach Mathematik.

4 Erfahren von Kompetenzzuwachs durch vertikale Vernetzung von Unterrichtsinhalten

4.1 Kumulatives Lernen nach dem Spiralprinzip

Dem im vorangegangenen Kapitel angesprochenen Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen entspricht ein vergleichbares Prinzip auf der inhaltlichen Ebene: das Prinzip der Vernetzung von Curriculumelementen zum Aufbau einer kohärenten Wissensstruktur. Die damit verbundene didaktische Absicht beschränkt sich nicht auf das Ziel, die Lernenden in die Lage zu versetzen, ein erworbenes Schema auf strukturähnliche Situationen zu übertragen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch stärker integrative Curriculumkonstruktionen darin unterstützt werden, die einzelnen Lerninhalte mehr und mehr in einen Prozeß der Reflexion einzubetten - nur so wird Kompetenzzuwachs wirklich erfahrbar.

Vertikale Verknüpfungen von Unterrichtsstoffen sind charakteristisch für ein *Spiralcurriculum*. Müller und Wittmann [06] beschreiben das Spiralprinzip wie folgt: „Grundlegende Ideen sollen im Unterricht in mehreren Durchgängen mit steigendem Niveau behandelt werden. Mit dem Fortschreiten auf der Spirale werden anfangs intuitive, ganzheitliche, undifferenzierte Vorstellungen zunehmend von formaleren, deutlicher strukturierten, analytisch durchdrungenen Kenntnissen überlagert.“

Im Unterschied zu linear fortschreitenden Curriculumkonstruktionen werden hier die wesentlichen Lerninhalte nicht erst gegen Ende des Lehrgangs nach einer langen Reihe von Vorübungen angesprochen, sondern es ist den Lernenden von Anfang an klar, worum es geht. Wittmann bemerkt hierzu in [09]: „Es empfiehlt sich nicht, die Erlernung eines Gegenstandes aufzuschieben, bis in einem Zug eine endgültig-abschließende Klärung erfolgen kann. Vielmehr sollte die Behandlung *gerade der wesentlichen Punkte* bereits auf früheren Stufen in entsprechend einfacher Form eingeleitet werden.“

Das Kap. 4.2 enthält zwei Spiralwindungen zu Zerlegungsbeweisen am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras. Dabei wird mit Gittern und periodischen Mustern experimentiert. Die erste Windung (Kap. 4.2.1) setzt in der 7. oder 8. Klasse beim Thema Kongruenzabbildungen an. Die zweite Windung (Kap. 4.2.2) wird in Klasse 9 durchlaufen, wenn gemäß Lehrplan die Satzgruppe des Pythagoras zu behandeln ist.

4.2 Unterrichtsbeispiele

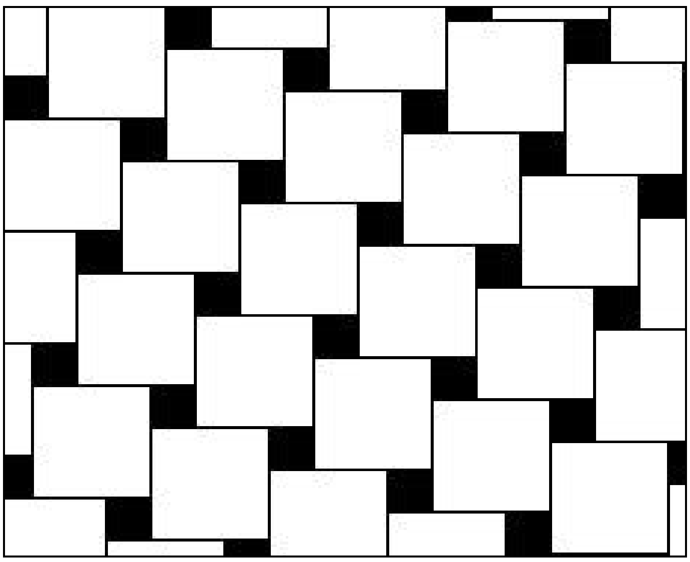
4.2.1 Zerlegungsbeweise, 1. Spiralwindung

In Klasse 7 oder 8 werden gewöhnlich die Kongruenzabbildungen behandelt, in Klasse 9 die Satzgruppe des Pythagoras. Betrachtet man bekannte Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, wie z.B. den „Schaufelradbeweis“ oder andere Zerlegungsbeweise (siehe etwa [02], S. 59), bekommt man Ideen, auf welche Weise man die Behandlung des Satzes von Pythagoras gemäß dem Spiralprinzip bereits in der 7. bzw. 8. Klasse einleiten kann.

Die erste Windung der Lernspirale könnte so aussehen:
Die Lehrkraft zeigt ein Fliesenmuster, das optisch aus unterschiedlich großen schwarzen und weißen Quadraten zusammengesetzt ist. Tatsächlich handelt es sich aber um einen Boden aus nur *einer* Sorte schwarz-weißer quadratischer PVC-Fliesen. Das wirft zwei Fragen auf:

1) Wie sieht das Muster der einzelnen Fliese aus?
2) Welche Größe (Seitenlänge) haben die Fliesen?

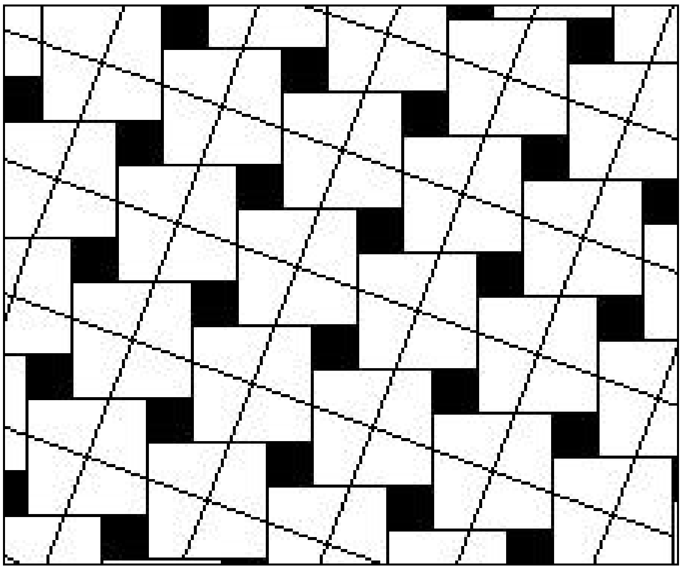
So soll der fertige Fliesenboden aussehen:



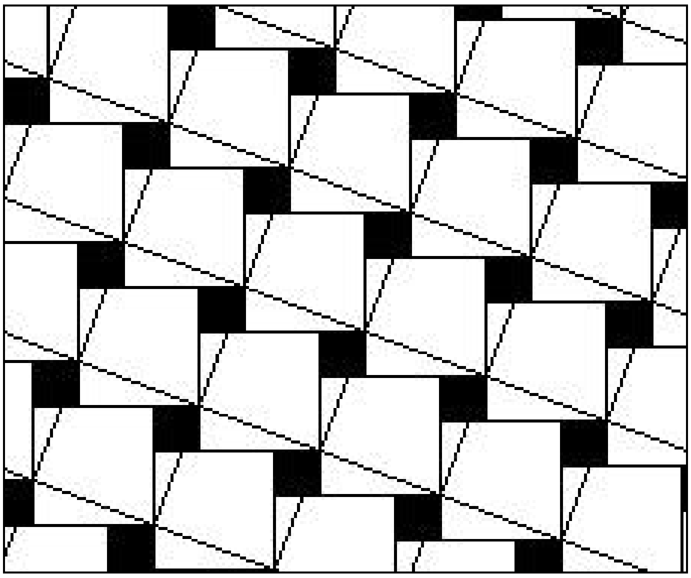
Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe experimentell lösen, wenn ihnen transparente Folien mit Quadratrastern verschiedener Maschengröße zur Verfügung gestellt werden. Sie müssen das richtige Raster wählen und es geeignet auflegen.

Dies sind zwei der unendlich vielen Lösungsmöglichkeiten:

1. Lösung:



2. Lösung:



Jede *Verschiebung* der Rasterfolie ergibt wieder eine Lösung der Aufgabe. Bei *Drehung* erhält man entgegen der Aufgabenstellung unterschiedliche Fliesen.

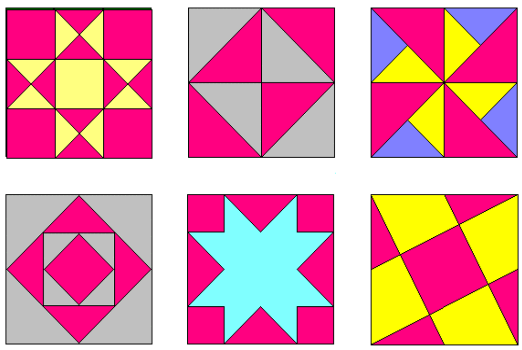
Anhand der Muster ist zu erkennen:

Der Flächeninhalt einer Fliese setzt sich aus den Flächeninhalten eines weißen und eines schwarzen Quadrats zusammen.

Die Seiten des schwarzen und des weißen Quadrats bilden zusammen mit der Seite des Fliesenquadrats ein rechtwinkliges Dreieck.

In Winter ([08], S. 20) wird die Gittermethode auf den Spezialfall gleich großer Ausgangsquadrate angewendet (Problem der Quadratverdopplung). Dabei wird auf verschiedene Vertiefungsmöglichkeiten - einschließlich Irrationalitäts-betrachtungen - hingewiesen. Die in der Mathematikdidaktik (Dienes u.a.) oft kontrovers diskutierte Frage, ob im Schulunterricht vom Speziellen zum Allgemeinen oder umgekehrt vorgegangen werden soll, kann man nur mit „sowohl – als auch“ beantworten. Beide Methoden haben ihre Chancen und ihre Schwierigkeiten. Vor allem ist es wichtig, in der Unterrichtsgestaltung ein möglichst hohes Maß an Spontaneität zuzulassen.

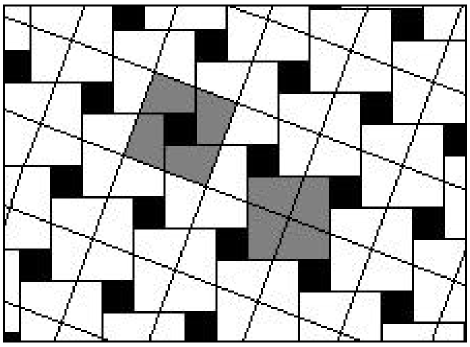
Sehr reizvolle Variationen des Themas Quadratverdopplung (-vervielfachung) findet man in den traditionellen amerikanischen Quiltmustern (*engl.*: quilt = Steppdecke). Die seit Generationen überlieferten Muster haben fantasievolle Namen, wie *„Ohio Star“* (links oben) oder *„Washington Puzzle“* (rechts unten). Das „Quiltbuch“ von M. Walker [07], aus dem die unten abgebildeten Motive entnommen sind, enthält viele professionelle Anregungen zur grafischen Gestaltung, die sich für einen anwendungsbezogenen, kreativitätsfördernden und evtl. fachübergreifenden Mathematikunterricht nutzen lassen.

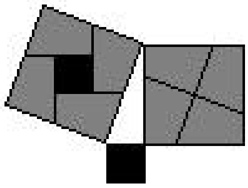


4.2.2 Zerlegungsbeweise, 2. Spiralwindung

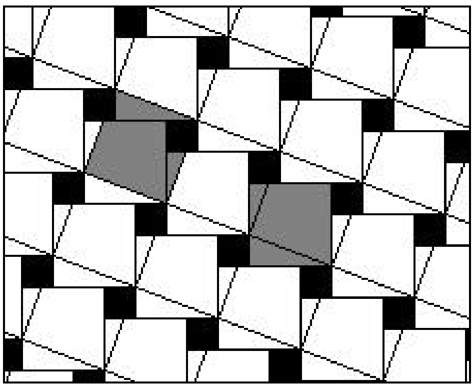
Die Spirale startete je nach Lehrplanvoraussetzungen in der 7. / 8. Klasse. Im 9. Jahrgang wird das Thema wieder aufgenommen im Rahmen der Behandlung der Satzgruppe des Pythagoras. Kompetenzzuwachs zeigt sich nunmehr im Erkennen und bewussten Anwenden bzw. Variieren eines Beweisprinzips. Ein „Aha-Erlebnis“ ist die Beobachtung, dass durch Verschiebungen des Quadratrasters beliebige neue Zerlegungsbeweise gewonnen werden können.

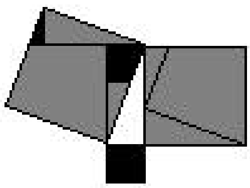
Beispiel 1: der „Schaufelradbeweis“ im Mosaik





Beispiel 2: Beweis „Stuhl der Braut“

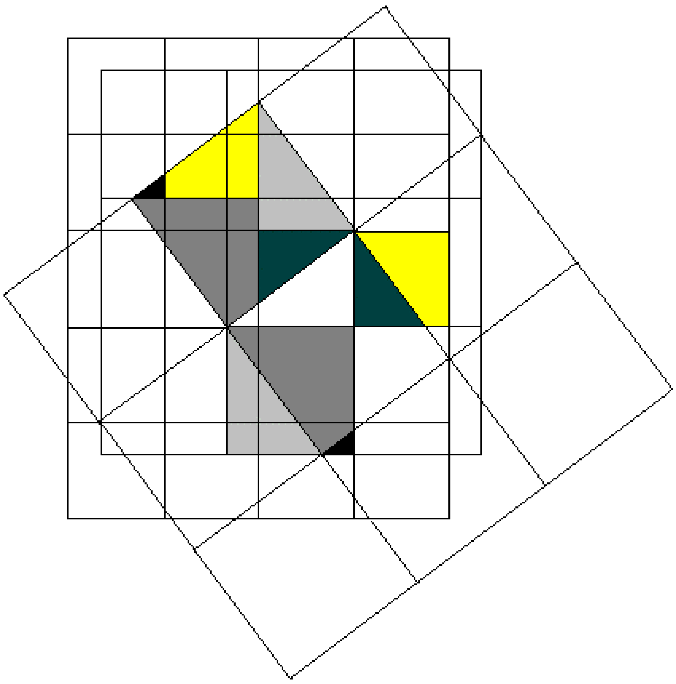




Wichtiger als der einzelne Beweis ist jetzt die Reflexion über die der Beweistechnik zugrunde liegenden mathematischen Ideen und Handlungsmuster. Dieser Prozess wird unterstützt durch das gemeinsame Experimentieren in Gruppen.

Der schon aus der ersten Spiralwindung bekannte enaktive Umgang mit Quadratrastern kann fortgesetzt werden mit Versuchen der folgenden Art:

Die Pythagorasfigur besteht aus drei Quadraten, die ein rechtwinkliges Dreieck einschließen. Jedes der drei Quadrate kann man sich als Masche eines Quadratgitters vorstellen. Legt man die drei Gitter in entsprechender Weise übereinander, ergibt sich ein Patchwork-Muster, auf dessen Grundlage man einen Zerlegungsbeweis konstruieren kann.

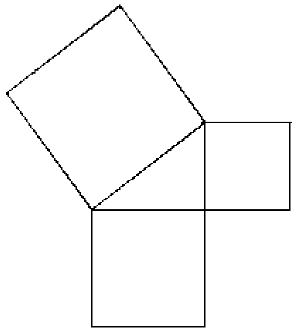


(Man könnte die Frage anschließen, ob das Gesamtmosaik periodisch ist oder sein kann.)

Die Methode des Erzeugens von Mustern durch Überschneidungen stellt ein weites Experimentierfeld mit vielfältigen Möglichkeiten dar. Wir werden sie in der folgenden Übung auf die drei Sätze der Satzgruppe des Pythagoras anwenden.

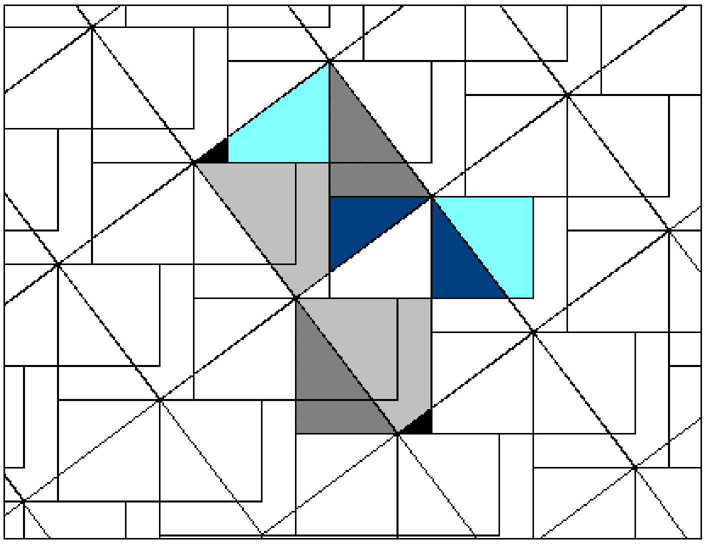
Bei diesen Experimenten ist der Computer ein wichtiges Hilfsmittel.

Mit Hilfe eines normalen Grafikprogramms lässt sich auf ganz unkomplizierte Weise ein periodisches Mosaik generieren, das die Grundlage für einen Zerlegungsbeweis liefert. Man überdeckt einfach die Zeichenebene mit Kopien der Pythagorasfigur:

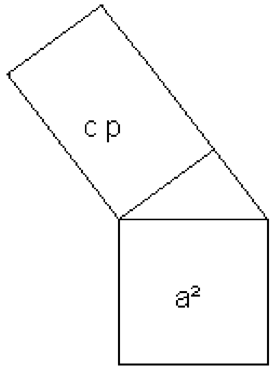


Die Schülerinnen und Schüler können durch Verschieben der Kopien am Bildschirm selbst herausfinden, welche Anordnung für das Erarbeiten eines Zerlegungsbeweises günstig ist.
Im vorliegenden Beispiel bilden die *Hypotenusenquadrate* das Grundraster des Mosaiks.

Mosaik zur Veranschaulichung des Satzes von Pythagoras:

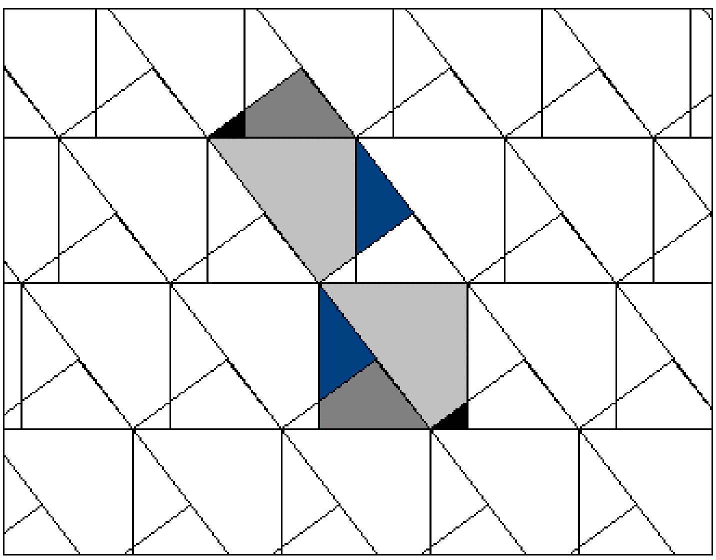


Die Mosaikmethode lässt sich sehr schön auf die beiden anderen zur Satzgruppe des Pythagoras gehörenden Flächensätze übertragen. Wir betrachten zunächst den *Kathetensatz*. Eine einfache, durchschaubare Zerlegung erzielt man, wenn man das Mosaik nicht mit der vollständigen Pythagorasfigur, sondern mit dieser Teilfigur generiert:

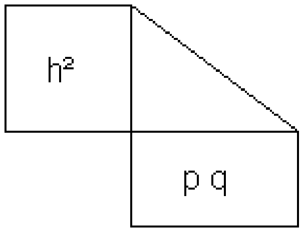


Kopien der Figur wurden hier so angeordnet, dass eine Parkettierung durch die Kathetenquadrate sich überschneidet mit einer Parkettierung durch die Rechtecke cp. Zu beachten ist, dass das Mosaik nur die *visuelle Grundlage* für einen Beweis bietet, dessen einzelne Schritte anschließend ausgearbeitet werden müssen.

Mosaik zur Veranschaulichung des Kathetensatzes:

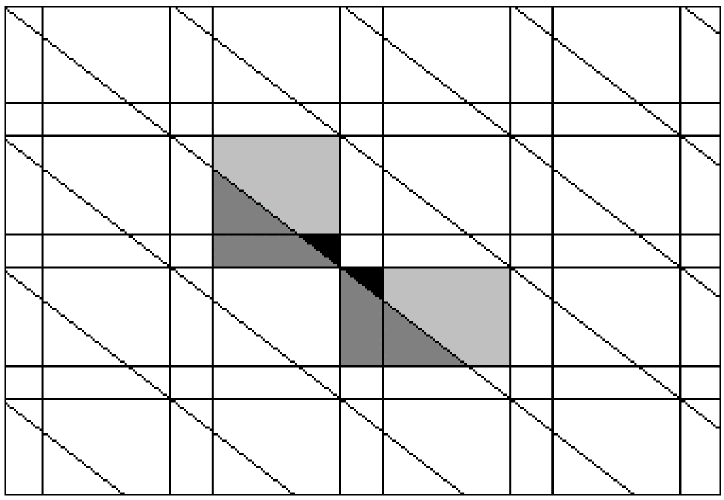


Beim *Höhensatz* kann man z.B. von dieser Figur ausgehen:



Die günstigste Anordnung ergibt sich wiederum durch freies Experimentieren. Die Kopien der Figur sind im hier gezeigten Beispiel so positioniert, dass die Rechtecke pq eine horizontale Kette bilden, während die Höhenquadrate sich vertikal aneinander reihen.

Mosaik zur Veranschaulichung des Höhensatzes:



Beim Ausarbeiten des Beweises anhand des Mosaiks liegt eine wesentliche Lernchance in den folgenden beiden Schritten:

1. durch systematisches Probieren feststellen, dass das experimentell Gefundene kein Sonderfall ist;

2. Gründe für die Allgemeingültigkeit herausfinden und formulieren.

Durch die Möglichkeit des Computereinsatzes ist experimentelles Arbeiten schneller und effektiver geworden. Mit dem in Bayreuth entwickelten interaktiven Geometrieprogramm GEONET (Informationen unter: geonet@did.mat.uni-bayreuth.de) kann man u.a. *Invarianzeigenschaften* sichtbar machen. Solchen visuellen Erfahrungen kommt eine Schlüsselrolle beim entdeckenden Lernen im Geometrieunterricht zu.

Solange in der Schule hauptsächlich die *Endprodukte* mathematischen Arbeitens (fertige Algorithmen und Endfassungen von Beweisen) vorgestellt werden, wird den Lernenden der interessanteste Aspekt des Fachs vorenthalten. Gerade das selbstmotivierte Beobachten und Spielen mit Beweisideen macht die wirkliche Freude an der Mathematik aus. Es lässt die Schülerinnen und Schüler unmittelbar erleben, wie mathematisches Wissen entsteht (*genetisches* Lernen), und fördert auf diese Weise das Erfahren von Kompetenzzuwachs. Die seltenen Fälle in der Geschichte, in denen Mathematiker über ihre Denkweisen und Arbeitsmethoden (und auch über ihre Schwierigkeiten) Auskunft gegeben haben, sollte man dazu unbedingt im Unterricht aufgreifen (siehe [01], S. 8 ff und [02], S. 54 ff).

5 Nachwort

Anhand von Unterrichtsbeispielen wurden drei Prinzipien erläutert, die das Wahrnehmen von Kompetenzsteigerung im Fach Mathematik begünstigen:

- das Einbeziehen der außerschulischen Erfahrung,
- die Variation der Repräsentationsformen sowie
- die Behandlung zentraler Themen in mehreren Durchgängen.

Alle drei Aspekte – einzeln und erst recht im Zusammenwirken – führen langfristig zu einer grundlegenden Änderung der Lernsituation dahingehend, dass die Rolle der Lernenden in der Unterrichtskommunikation gestärkt wird und die Schüler in die inhaltliche Weiterentwicklung des Unterrichts eingebunden werden. Mit Recht kritisiert die BLK-Expertise den enggeführten fragend-entwickelnden Unterrichtsstil, da in der für ihn charakteristischen asymmetrischen Kommunikationsstruktur bei der Mehrheit der am Unterricht Beteiligten kaum ein Gefühl von Kompetenz aufkommen kann (vgl. [03], Kap. 3.6).

Kompetenzerfahrung ist untrennbar verbunden mit Autonomieerfahrung.

Letztere setzt voraus, dass die Lehrkraft ihren Schülern das eigenständige Entwickeln von Lösungsstrategien zutraut und die hierfür nötigen Freiräume gewährt. Das erfordert Mut und den sprichwörtlichen „langen Atem“. Das BLK-Programm zur *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts* ist auf den Mut und die Innovationsfreude der beteiligten Kolleginnen und Kollegen angewiesen.

Literatur

[01] Baptist, P.: Elemente einer neuen Aufgabenkultur; *Bayreuth 1998*

[02] Baptist, P.: Pythagoras und kein Ende? ; *Klett 1997*

[03] BLK (Hrsg.): Expertise zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts; *Heft 60, 1997*

[04] Heymann, H.-W.: Allgemeinbildung und Mathematik; *Weinheim 1996*

[05] Lehmann, E.: Terme im Mathematikunterricht; *Schroedel 1999*

[06] Müller, G. und Wittmann, E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe; *vieweg 1984*

[07] Walker, M.: Das Quiltbuch; *Otto-Maier-Verlag, Ravensburg 1986*

[08] Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht; *vieweg 1991*

[09] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts; *vieweg 1981*

[10] Wittmann, E. et al.: „programm mathe 2000“; *Klett (seit 1990)*